

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебры Хопфа (осн курс), тр 5-8 сем  
Hopf Algebras

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 053595

## **Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

### **1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Сообщение сведений об алгебрах Хопфа в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов теории алгебр Хопфа.

### **1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Алгебра» или «Высшая алгебра».

### **1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: алгебры Хопфа, строение алгебр Хопфа, применение алгебр Хопфа.

### **1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа.

## Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

### 2.1. Организация учебных занятий

#### 2.1.1 Основной курс

| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся |  |          |              |                      |                     |                    |             |                  |                          |                     |                                |                             |  |                             |                                     |   |              |
|---|--|----------|--------------|----------------------|---------------------|--------------------|-------------|------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|-------------------------------------|---|--------------|
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.                      | Контактная работа обучающихся с преподавателем |          |              |                      |                     |                    |             |                  |                          |                     |                                | Самостоятельная работа      |  |                             |                                     | Объём активных и интерактивных форм учебных занятий | Трудоёмкость |
|   | лекции   | семинары | консультации | практические занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии преподавателя | сам. раб. с использованием методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) |   |              |
| <b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>  |  |          |              |                      |                     |                    |             |                  |                          |                     |                                |                             |  |                             |                                     |   |              |
| <b>очная форма обучения</b>   |  |          |              |                      |                     |                    |             |                  |                          |                     |                                |                             |  |                             |                                     |   |              |
| Семестр 5-8   | 32   |          | 2            |                      |                     |                    |             | 2                |                          |                     |                                | 44                          |  | 28                          |                                     | 4   | 3            |
|   | 2-50   |          | 2-50         |                      |                     |                    |             | 2-50             |                          |                     |                                | 1-1                         |  | 1-1                         |                                     |   |              |
| <b>ИТОГО</b>  | <b>32</b>                                      |          | <b>2</b>     |                      |                     |                    |             | <b>2</b>         |                          |                     |                                | <b>44</b>                   |  | <b>28</b>                   |                                     | <b>4</b>  | <b>3</b>     |

| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации |                                      |       |                                    |                                     |  |       |
|---|--------------------------------------|-------|------------------------------------|-------------------------------------|--|-------|
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.                              | Формы текущего контроля успеваемости |       | Виды промежуточной аттестации      |                                     | Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) |       |
|   | Формы                                | Сроки | Виды                               | Сроки                               | Виды   | Сроки |
| <b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>  |                                      |       |                                    |                                     |  |       |
| <b>очная форма обучения</b>   |                                      |       |                                    |                                     |  |       |
| Семестр 5-8   |                                      |       | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |       |

## 2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 5-8

| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий             | Количество часов |
|-------|------------------------------------|---------------------------------|------------------|
| 1     | Алгебры Хопфа                      | Лекции                          | 8                |
|       |                                    | практические занятия            |                  |
|       |                                    | в присутствии преподавателя     |                  |
|       |                                    | по методическим материалам      | 11               |
| 2     | Строение алгебр Хопфа              | Лекции                          | 8                |
|       |                                    | практические занятия            |                  |
|       |                                    | в присутствии преподавателя     |                  |
|       |                                    | по методическим материалам      | 11               |
| 3     | Применение алгебр Хопфа            | Лекции                          | 16               |
|       |                                    | практические занятия            |                  |
|       |                                    | в присутствии преподавателя     |                  |
|       |                                    | по методическим материалам      | 22               |
| 4     | Экзамен                            | промежуточная аттестация (ауд)  | 2                |
|       |                                    | промежуточная аттестация (с.р.) | 28               |

### Раздел 1: Алгебры Хопфа

1. Категорное определение алгебр. Коалгебры. Примеры (двойственная к алгебре, моноидная алгебра, универсальная обертывающая алгебра).
2. Антипод. Определение алгебры Хопфа. Групповые и примитивные элементы.
3. Групповая структура на гомоморфизмах из алгебры Хопфа в алгебру.
4. Модули, комодули и хопфовы идеалы.

### Раздел 2: Строение алгебр Хопфа

1. Теорема Хопфа о строении связной градуированной коммутативной алгебры Хопфа над полем характеристики 0.
2. Теорема Бореля о строении связной градуированной коммутативной алгебры Хопфа над совершенным полем.
3. Теорема Милнора–Мура о строении связной градуированной кокоммутативной алгебры Хопфа.
4. Теорема разложения Картье–Габриэля над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

### Раздел 3: Применение алгебр Хопфа

1. Кольцо регулярных функций на аффинной алгебраической группе как алгебра Хопфа.

2. Существование точного конечномерного представления аффинной алгебраической группы.
3. Двойственность Картье.
4. Алгебра когомологий группы Ли как алгебра Хопфа. Теорема Бореля.
5. Теория Галуа в терминах алгебр Хопфа.
6. Алгебры Хопфа в комбинаторике.
7. Квантовые группы. Построение квантовой  $SL_2$ .

### **Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

#### **3.1. Методическое обеспечение**

##### **3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций

##### **3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература

##### **3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

###### **Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

##### **3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Период обучения (модуль): **Семестр 5-8**

**Список вопросов к экзамену:**

1. Категорное определение алгебр. Коалгебры. Примеры (двойственная к алгебре, моноидная алгебра, универсальная обертывающая алгебра).
2. Антипод. Определение алгебры Хопфа. Групповые и примитивные элементы.
3. Групповая структура на гомоморфизмах из алгебры Хопфа в алгебру.
4. Модули, комодули и хопфовы идеалы.
5. Теорема Хопфа о строении связной градуированной коммутативной алгебры Хопфа над полем характеристики 0.

6. Теорема Бореля о строении связной градуированной коммутативной алгебры Хопфа над совершенным полем.
7. Теорема Милнора–Мура о строении связной градуированной кокоммутативной алгебры Хопфа.
8. Теорема разложения Картье–Габриэля над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.
9. Кольцо регулярных функций на аффинной алгебраической группе как алгебра Хопфа.
10. Существование точного конечномерного представления аффинной алгебраической группы.
11. Двойственность Картье.
12. Алгебра когомологий группы Ли как алгебра Хопфа. Теорема Бореля.
13. Теория Галуа в терминах алгебр Хопфа.
14. Алгебры Хопфа в комбинаторике.
15. Квантовые группы. Построение квантовой  $SL_2$ .

### **3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

### **3.2. Кадровое обеспечение**

#### **3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

#### **3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

не требуется

### **3.3. Материально-техническое обеспечение**

#### **3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

#### **3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

доска для письма мелом или фломастером

#### **3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

не требуется

### **3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

не требуется

### **3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

## **3.4. Информационное обеспечение**

### **3.4.1 Список обязательной литературы**

1. P. Cartier, A primer of Hopf algebras,  
<http://preprints.ihes.fr/2006/M/M-06-40.pdf>

### **3.4.2 Список дополнительной литературы**

### **3.4.3 Перечень иных информационных источников**

## **Раздел 4. Разработчики программы**

Петров Виктор Александрович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник  
ПОМИ РАН, victorapetrov@gmail.com