

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебры и группы Ли (осн курс), тр 5-8 сем
Lie algebras and Lie groups

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 059716

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о теории Галуа в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов теории Галуа.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Владение курсом «Алгебра» или «Высшая алгебра».

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: основы теории групп Ли, представления групп и алгебр Ли, полупростые комплексные алгебры Ли, неприводимые представления полупростых комплексных алгебр Ли; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа, семинары 30 часов.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																	
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	Лабораторные работы	Контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																	
очная форма обучения																	
Семестр 5-8	30	30	2					2				48		32		34	4
	2-50	2-25	2-50					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	30	30	2					2				48		32		34	4

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 5-8			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 5-8

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Основы теории групп Ли	Лекции	10
		семинары	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	12
2	Представления групп и алгебр Ли	Лекции	6
		Семинары	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	12
3	Полупростые комплексные алгебры Ли	Лекции	10
		Семинары	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	12
4	Неприводимые представления полупростых комплексных алгебр Ли	Лекции	6
		Семинары	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	12
5	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	32

Раздел 1: Основы теории групп Ли

1. Вещественные и комплексные группы Ли. Примеры. Связные группы Ли. Односвязное накрытие группы Ли. Подгруппы группы Ли.
2. Фактор-многообразие по подгруппе группы Ли. Теорема о гомоморфизме (без доказательства). Действие группы Ли на многообразии.
3. Экспоненты в классических алгебрах Ли. Экспоненциальное отображение. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли подгруппы, нормальной подгруппы. Алгебра Ли векторных полей.
4. Орбиты групп Ли. Доказательство теоремы о гомоморфизме для групп Ли. Центр группы Ли. Представления групп Ли.
5. Формула Кэмпбелла-Бейкера-Хаусдорфа. Эквивалентность категорий конечномерных алгебр Ли и односвязных групп Ли. Вещественные формы комплексных групп Ли.

Раздел 2: Представления групп и алгебр Ли

1. Эквивалентность категорий линейных представлений групп и алгебр Ли. Подпредставления и фактор-представления. Сумма и тензорное произведение представлений.
2. Неприводимые представления. Лемма Шура. Представления коммутативных групп и алгебр Ли. Полная приводимость унитарных представлений.
3. Мера Хаара на компактных группах Ли. Ортогональность характеров и формула Петера-Вейля. Классификация представлений $sl_2(\mathbb{C})$ без доказательства.

Раздел 3: Полупростые комплексные алгебры Ли

1. Производная алгебра Ли. Основные свойства разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Радикал. Разложение Жордана-Шевалле. Форма Киллинга. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли.
2. Полупростые и редуцированные алгебры Ли. Полупростота эквивалентна невырожденности формы Киллинга. Полная приводимость представлений полупростой алгебры. Сохранение разложения Жордана при гомоморфизмах.
3. Торические подалгебры и корневое разложение полупростой комплексной алгебры Ли.
4. Абстрактные системы корней. Простые корни. Группа Вейля. Диаграммы Дынкина и классификация неприводимых систем корней (без доказательства).
5. Теорема об изоморфизме для простых комплексных алгебр Ли с одинаковыми системами корней. Картановские подалгебры.
6. Соотношения Серра и классификация полупростых комплексных алгебр Ли. Теорема существования.

Раздел 4: Неприводимые представления полупростых комплексных алгебр Ли

1. Весовое разложение и характеры. Представления старшего веса и модули Верма. Классификация неприводимых конечномерных представлений.
2. Формула характеров Вейля. Теорема Хариш-Чандры.
3. Базис Шевалле. Целочисленная определенность представлений. Группы Шевалле.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и семинаров

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 5-8**

Список вопросов к экзамену:

1. Вещественные и комплексные группы Ли. Примеры.
2. Связные группы Ли. Односвязное накрытие группы Ли.
3. Подгруппы группы Ли.
4. Фактор-многообразие по подгруппе группы Ли. Теорема о гомоморфизме (без доказательства). Действие группы Ли на многообразии.

5. Экспоненты в классических алгебрах Ли. Экспоненциальное отображение.
6. Алгебры Ли, их подалгебры и идеалы. Теорема о гомоморфизме. Дифференцирование.
7. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли подгруппы, нормальной подгруппы.
8. Алгебра Ли векторных полей.
9. Орбиты групп Ли. Доказательство теоремы о гомоморфизме для групп Ли.
10. Центр группы Ли. Представления групп Ли.
11. Формула Кэмпбелла-Бейкера-Хаусдорфа. Эквивалентность категорий конечномерных алгебр Ли и односвязных групп Ли.
12. Вещественные формы комплексных групп Ли.
13. Эквивалентность категорий линейных представлений групп и алгебр Ли.
14. Подпредставления и фактор-представления. Сумма и тензорное произведение представлений.
15. Неприводимые представления. Лемма Шура. Представления коммутативных групп и алгебр Ли.
16. Полная приводимость унитарных представлений.
17. Мера Хаара на компактных группах Ли.
18. Ортогональность характеров и формула Петера-Вейля.
19. Классификация представлений $sl_2(\mathbb{C})$.
20. Производная алгебра Ли. Основные свойства разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Радикал.
21. Теорема Энгеля.
22. Теорема Ли о приведении разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду.
23. Разложение Жордана-Шевалле.
24. Форма Киллинга. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли.
25. Полупростые и редуцируемые алгебры Ли. Полупростота эквивалентна невырожденности формы Киллинга.
26. Полная приводимость представлений полупростой алгебры.
27. Сохранение разложения Жордана при гомоморфизмах.

28. Компактность вещественной группы Ли в терминах формы Киллинга ее алгебры Ли.
29. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли. Задание алгебры Ли образующими и соотношениями.
30. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.
31. Торические подалгебры и корневое разложение полупростой комплексной алгебры Ли.
32. Абстрактные системы корней. Простые корни. Группа Вейля. Диаграммы Дынкина и формулировка классификации неприводимых систем корней.
33. Существование систем простых корней и их сопряженность при помощи группы Вейля.
34. Теорема об изоморфизме для простых комплексных алгебр Ли с одинаковыми системами корней.
35. Картановские подалгебры, их существование.
36. Сопряженность картановских подалгебр.
37. Соотношения Серра и классификация полупростых комплексных алгебр Ли.
38. Теорема существования полупростых комплексных алгебр Ли.
39. Весовое разложение и характеры. Представления старшего веса и модули Верма.
40. Критерий конечномерности неприводимого представления в терминах старшего веса.
41. Классификация неприводимых конечномерных представлений.
42. Резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда и порядок Брюа.
43. Формула характеров Вейля.
44. Представления $sl_n(\mathbb{C})$.
45. Теорема Хариш-Чандры.
46. Базис Шевалле. Целочисленная определенность представлений. Группы Шевалле.

Темы докладов на семинаре:

1. Классические группы Ли и их алгебры Ли.

2. Алгебры Ли, их подалгебры и идеалы. Теорема о гомоморфизме. Дифференцирования.
3. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли. Теорема Энгеля.
4. Теорема Ли о приведении разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду.
5. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли. Задание алгебры Ли образующими и соотношениями.
6. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.
7. Доказательство классификации представлений $sl_2(\mathbb{C})$.
8. Компактность вещественной группы Ли в терминах формы Киллинга ее алгебры Ли.
9. Существование систем простых корней и их сопряженность при помощи группы Вейля.
10. Доказательство классификации неприводимых систем корней.
11. Сопряженность картановских подалгебр алгебры Ли.
12. Критерий конечномерности неприводимого представления в терминах старшего веса.
13. Резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда и порядок Брюа.
14. Представления $sl_n(\mathbb{C})$.
15. Теорема Костанта.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли. – М.: Мир, 1976.
2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. – М.: Мир, 1969.
3. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. – М.: МЦНМО, 2003.

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли. – М.: Мир, 1978.
2. Фултон У., Харрис Дж. Теория представлений, начальный курс. – М.: МЦНМО, 2017.
3. A. Kirillov, Jr., An introduction to Lie groups and Lie algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 113, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

Раздел 4. Разработчики программы

Ставрова Анастасия Константиновна, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Лаборатории им. П.Л. Чебышева, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский Государственный Университет, anastasia.stavrova@gmail.com