

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. Н. Бородин

Курс посвящен стохастическому исчислению, основы которого были заложены К. Ито. На начальном этапе создания этой теории практически невозможно было предвидеть, насколько плодотворной она окажется. Ее роль для теории случайных процессов можно сравнить с ролью дифференциального исчисления для математического анализа и других дисциплин. Теория стохастических дифференциальных уравнений явилась естественным развитием теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Стохастические интегралы по броуновскому движению, траектории которого имеют неограниченную вариацию, принципиально отличаются от классических интегралов. Это приводит к тому, что стохастические дифференциалы от композиций гладких функций с решениями стохастических дифференциальных уравнений зависят от вторых производных функций, находящихся под знаком дифференциала, что абсолютно невозможно в классическом анализе. Такое различие проявляется в том, что при описании некоторых физических явлений, имеющих конструктивную природу и описываемых дифференциальными уравнениями, эти уравнения содержат вторые производные. Важнейшим примером является уравнение теплопроводности.

Естественным обобщением броуновского движения являются диффузионные процессы. К пониманию необходимости рассматривать диффузионные процессы, по-видимому, раньше пришли физики, чем математики. Ярким примером тому служит уравнение Эйнштейна–Смолуховского, описывающее движение легкой частицы в вязкой жидкости. С одной стороны, хаотичное движение молекул жидкости в результате соударений с частицей придает ей неупорядоченные перемещения, а с другой, вязкость ограничивает скорость такого перемещения. Эти два фактора и были учтены при возникновении стохастического дифференциального уравнения Эйнштейна–Смолуховского. Строгое математическое определение диффузионных процессов дал А. Н. Колмогоров. После появления стохастического исчисления Ито выяснилось, что при некоторых предположениях определенные Колмогоровым диффузионные процессы являются решениями соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

В курсе мы планируем рассмотреть основные понятия и результаты стохастического исчисления, а также будут даны некоторые приложения.