Экзамен в магистратуру “Современная математика” 2019. Вариант 1.

1. (Алгебра)

Даны 3×3-матрицы A, B с вещественными элементами. Докажите, что семь матриц $A^2B + ABA + BA^2, AB + BA, A^2, A, B^2, B, I$ линейно зависимы над $\mathbb{R}$. [I обозначает единичную 3×3-матрицу.]

2. (Геометрия и топология)

Дуга параболы $y = x^2$ между точками $(-2, 4)$ и $(3, 9)$ параметризована натуральным параметром. Найдите интеграл от её кривизны (по натуральному параметру в пределах его изменения).

3. (Математический анализ и анализ Фурье)

Сколько корней имеет уравнение $\sin(z^{2019}) = z/10$ в круге $|z| \leqslant 1$?

4. (Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическая физика)

Существует ли локально суммируемя функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенству

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) dxdydz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0,0)$$

для любой гладкой функции $\varphi(x, y, z)$ с компактным носителем?

5. (Теория вероятностей)

Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ распределены равномерно в отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \xi_i\xi_j.$$

Докажите, что существует неотрицательная измеримая функция $p(x)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{prob}\{X_n < a\} = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

при всяком $a \in \mathbb{R}$. Найдите эту функцию. [$\mathrm{prob}\{A\}$ это вероятность события A].

6. (Дискретная математика)

Серёжа взял $3n+1$ спичку и сложил из них прямоугольник с шириной в одну спичку и длиной n спичек, разбитый на n квадратов. Теперь он хочет n из этих спичек убрать так, чтобы не осталось ни одного прямоугольника (любого размера), весь периметр которого выложен спичками. Пусть $f(n)$ — число способов это сделать. Найдите предел $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n)$.

7. (Математическая логика и теория множеств)

Пусть X и $A \subset X \times X$ — бесконечные множества. Докажите, что A можно представить в виде $A = B \cup C$ так, что

$$|B \cap (\{x\} \times X)| < |A|,$$
$$|C \cap (X \times \{x\})| < |A|$$

для любого элемента $x \in X$. [Здесь $|X|$ обозначает мощность множества, доказательство имеется в виду в системе аксиом ZFC. В остальных задачах тоже.]