

Экзамен в магистратуру «Современная математика» 2020. Вариант 1.

1. (Алгебра) Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$; комплексные матрицы A, B порядка n таковы что $A^n = B^n = I$ (здесь I — единичная матрица) и $AB = \omega BA$. Докажите, что n^2 матриц $A^j B^k, 0 \leq j, k \leq n-1$, линейно независимы.

2. (Геометрия и топология) Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ и точка $O \in K$ таковы, что на любом луче r с началом в точке O найдётся точка $A \neq O$, для которой отрезок OA содержится в K и все углы вида $\angle OAB$, где $B \in K \setminus \{A\}$, острые (нулевой угол считается острым, а развёрнутый нет.) Докажите, что K это замкнутый шар с центром в O .

3. (Математический анализ и анализ Фурье) Аналитическая в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0, |f'(z)(1 - |z|)| \leq 1$ при $z \in D$. Докажите, что $|\int_0^\pi f(re^{it}) dt| \leq 2020$ при любом $r \in (0, 1)$.

4. (Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическая физика) Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная 1-периодическая функция. При каких условиях система

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

имеет единственное 1-периодическое решение $x(t)$? Докажите, что ответ на этот вопрос зависит только от набора собственных чисел матрицы A (в частности, не зависит от f), и сформулируйте его в терминах этого набора.

5. (Теория вероятностей) Магнус справляет день рождения. Вначале к нему пришёл первый гость, и они сыграли партию в шахматы. n -ый по счёту гость ($n = 2, 3, \dots$) выбирает случайно одну из $n-1$ уже сыгранных партий, затем также случайно одного из её участников, и играет с тем партию. Пусть X_n — количество партий среди первых n , в которых участвовал Магнус. Найдите константы A и c , такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} X_n}{cn^A} = 1.$$

6. (Дискретная математика) Вдоль прямой дороги стоит $3n$ верстовых столбов (расстояние между соседними столбами — одна верста). Дорожная полиция хочет поставить у n из них по посту наблюдения так, чтобы расстояние между соседними постами было не более 2 вёрст. Найдите количество способов это сделать.

7. (Математическая логика и теория множеств) Пусть $A = 2^{\mathbb{N}}$ — множество всех подмножеств натурального ряда, упорядоченное лексикографически (то есть $x < y$ при $x, y \in A$ тогда и только тогда, когда минимальный элемент симметрической разности множеств x и y принадлежит множеству y). Какова мощность множества всех автоморфизмов (то есть сохраняющих порядок взаимно однозначных отображений на себя) линейно упорядоченного множества A ?

8. (Теоретическая информатика) Докажите, что язык, состоящий из выполнимых формул в конъюнктивной нормальной форме, в которых каждый дизъюнкт является либо хорновским, либо содержит две переменных, является NP-полным. (Дизъюнкт называется хорновским, если не более одной переменной входит в него без отрицания.)