Листочек 12
Математический анализ. 3 курс

Выдан: 20.09.2022. Дедлайн (крайний срок): 1.11.2021.

Базовые задачи

1. (1 балл) Пусть $\{a_n\}_n$ — стремящаяся к нулю последовательность вещественных положительных чисел. Докажите существование такой суммируемой функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, что $|\hat{f}(n)| \geq a_{|n|}$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$.

2. (2 балла) Пусть ν — заряд (комплексно-значная мера) на окружности. Докажите формулу

$$\sum_{x\in\mathbb{T}} |\nu(\{x\})|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\leq N} |\hat{\nu}(n)|^2.$$

3. (2 балла) Докажите существование постоянной C, такой что неравенство

$$\|\varphi'\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq C\|\varphi - \varphi''\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

справедливо для всякой гладкой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

4. (3 балла) Рассмотрим стандартную функцию-шапочку $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}\chi_{[-1,1]}(x)$. Докажите справедливость оценки $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C^{-1}e^{-C\sqrt{|\xi|}}$ для некоторой достаточно малой постоянной C.

5. (2 балла) Пусть функция $f \in L_1([0, 2\pi])$ такова, что её ряд Фурье сходится к величине A в точке a. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T})$ — гладкая функция. Докажите, что ряд Фурье функции φf в точке a сходится к $\varphi(a)A$.

6. (1 балл) Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Томограф* позволяет найти $\int_l f\, d\mathcal{H}^1$ для любой прямой $l \subset \mathbb{R}^2$. (Здесь $\mathcal{H}^1$ — одномерная мера Хаусдорфа, то есть длина. Функция f понимается как "непрозрачность" плоской среды.) Как найти f?

7. a (1.5 балла). Пусть $\#$ — считающая мера на $\mathbb{Z}$, $\ell^2 = \ell^2_{\mathbb{Z}} = L^2(\mathbb{Z}, \#)$ — пространство квадратично-суммируемых последовательностей, оснащённое стандартной нормой. Для $x = \{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ положим

$$Tx := y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad y_n := \sum_{m\in\mathbb{Z},\, m\neq n} \frac{x_m}{m-n}.$$

Покажите, что оператор $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ непрерывен.

b (2.5 балла). Пусть $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Будет ли непрерывным оператор $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $Tf = f * \varphi$ $(f \in L^2(\mathbb{R}))$? (Символ $*$ обозначает свёртку.)

8. (1 балл; *строгая эргодичность поворотов на окружности*) Пусть $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, а μ — вероятностная борелевская мера на единичной окружности $\mathbb{T}$. Пусть $\mu(E) = \mu(e^{i\alpha}E)$ для любого борелевского $E \subset \mathbb{T}$. Покажите, что мера μ пропорциональна мере длины на $\mathbb{T}$.

Рейтинговые задачи

9. Пусть коэффициенты функции $f \in L_1([0, 2\pi))$ вещественны, положительны и симметричны ($\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$). Докажите, что если последовательность $n \mapsto \hat{f}(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, выпукла, то функция f неотрицательна.

10. Существует ли конечный борелевский заряд μ на окружности, такой что

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(n) = a, \quad \lim_{n\to-\infty} \hat{\mu}(n) = b,$$

и $a \neq b$.

11. Пусть $P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{2\pi i 3^j x}$ — тригонометрический многочлен. Докажите неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| \lesssim \|P\|_{L_\infty(\mathbb{T})},$$

постоянная в неравенстве не зависит от параметра N.

12. При каких вещественных числах a и b неравенство

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big)\, dx\, dy \Big| \leq C\|\Delta f\|^2_{L_1(\mathbb{R}^2)}$$

выполнено с равномерной постоянной C для всех гладких функций f с компактным носителем?

13. Пусть μ — такая мера на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, что $\hat{\mu}(m, n) = 0$, если $mn < 0$. Докажите, что для всякой точки $x \in \mathbb{T}$ неравенство

$$\mu(B_r(x)) \lesssim r$$

справедливо при достаточно малых $r > 0$ (символ $B_r(x)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x в естественной метрике тора).

14. Пусть P — многочлен с вещественными коэффициентами чётной степени ≥ 2, не имеющий вещественных корней, $f = 1/P$. Покажите, что функция $\hat{f}$ бесконечно гладкая вне нуля.