

Занятие 5

5.10.22

1. Вычислите преобразование Фурье функций $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
2. Выразите преобразование Фурье функций $x \mapsto f(x+y)$, f' , $x \mapsto f(\lambda x)$ и $x \mapsto xf(x)$ через преобразование Фурье функции f .
3. Вычислите преобразование Фурье функций $xe^{-|x|}$, $xe^{-\pi x^2}$ и $\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1+x^2}$.
4. Докажите существование ненулевой постоянной c_α , такой что преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, равно $c_\alpha |x|^{\alpha-1}$. В каком смысле мы здесь понимаем интеграл Фурье? А чему равна постоянная c_α ?
5. Пусть f — гладкая функция с компактным носителем на прямой. Докажите неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f''(x)|^2 dx \right).$$