

Занятие 6

15.10.22

1. Докажите существование ненулевой постоянной c_α , такой что преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, равно $c_\alpha|x|^{\alpha-1}$. В каком смысле мы здесь понимаем интеграл Фурье? А чему равна постоянная c_α ?

2. Пусть f — гладкая функция с компактным носителем на прямой. Докажите неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f''(x)|^2 dx \right).$$

3. Вычислите преобразование Фурье следующих функций нескольких переменных

$$f(x) = e^{-\pi|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

$$f(x, y) = \chi_{\{|x|+|y|\leq 1\}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$f(x, y, z) = \chi_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = e^{-\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$