

Занятие 7

19.10.22

1. Пусть $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ — гладкая вплоть до границы строго убывающая неотрицательная функция, $f'(0) \neq 0$. Установите главный член асимптотики интегралов

$$\int_0^b f^n(x) dx, \quad n \rightarrow \infty; \quad (1)$$

$$\int_0^b x^\alpha f^n(x) dx, \quad n \rightarrow \infty, \alpha > 0. \quad (2)$$

2. Пусть $\Phi(\theta) = \int_0^\theta e^{-t^2} dt$. Докажите асимптотические тождества при $A \rightarrow \infty$

$$1. \int_0^{\frac{\theta}{\sqrt{A}}} (1 - x^2)^A dx \sim \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{A}};$$

$$2. \int_0^{\frac{\theta}{\sqrt{A}}} (1 + x^2)^{-A} dx \sim \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{A}}.$$

3. Найдите главные члены асимптотики следующих интегралов

$$1. \int_0^1 \cos^n x dx;$$

$$2. \int_0^1 x^2 \cos^n x dx;$$

$$3. \int_0^1 (1 + x^2)^{-n} dx;$$

$$4. \int_0^1 (1 - x^3)^n dx;$$

$$5. \int_0^1 (1 - x^4)^n dx;$$

$$6. \int_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2)^n dx dy.$$