

# Занятие 9

2.11.22

1. Найдите главные члены асимптотики следующих интегралов

1.  $\int_0^1 \cos^n x \, dx;$

2.  $\int_0^1 x^2 \cos^n x \, dx;$

3.  $\int_0^1 (1 - x^3)^n \, dx;$

4.  $\int_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2)^n \, dx \, dy.$

2. Вычислите второй член асимптотики для первого и второго интегралов предыдущего задания.

3. Пусть функция  $\Phi$  строго возрастает на интервале  $[a, b]$ ,  $\Phi'$  отделена от нуля, а функция  $\phi$  гладкая с носителем в этом интервале. Докажите, что функция  $\lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda\Phi(x)}\phi(x) \, dx$  лежит в классе Шварца.

4. Пусть функция  $\Phi$  строго убывает на интервале  $[0, a]$ ,  $\Phi'$  отделена от нуля. Найдите первые два члена асимптотики интеграла

$$\int_0^a x^\alpha e^{i\lambda\Phi(x)}\phi(x) \, dx, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где  $\varphi \in C^\infty([0, a])$ ,  $\varphi = 1$  в окрестности нуля и  $\varphi = 0$  в окрестности точки  $a$ , а число  $\alpha$  больше  $-1$ .

5. Пусть функция  $\Phi$  строго выпукла на интервале  $[-a, a]$ ,  $\Phi'(0) = 0$ , и трижды непрерывно дифференцируема, а функция  $\phi$  гладкая с носителем в этом интервале. Найдите главный член асимптотики интеграла  $\int_{-a}^a e^{i\lambda\Phi(x)}\phi(x) \, dx$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .