Листочек 13
Математический анализ. 3 курс

Выдан: 24.11.2022. Дедлайн (крайний срок): 18.12.2022.

Базовые задачи

1. (2 балла) Пусть вещественнозначная функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ монотонна на луче $[R, +\infty)$, а также на луче $(-\infty, -R]$ при некотором достаточно большом $R \in \mathbb{R}$. Пусть ещё нашлось такое число $\alpha > 0$, что $f(x) = O\left((1+|x|)^{-\alpha}\right)$ при достаточно больших $|x|$. Докажите, что преобразование Фурье $\hat{f}$, понимаемое *в смысле обобщённых функций*, — функция класса $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

2. (1 балл) Пусть $f \in C([0,1])$, $f(0) = f(1) = 0$, $g \in L^1([0,1])$. Покажите, что $g = f'$ в смысле обобщённых функций в том и только в том случае, если $f \in C([0,1])$ и $f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} g(t)\,dt$ для любого $x \in [0,1]$. Функции считаем продолженными нулём вне отрезка $[0,1]$.

3. а) (1 балл) Существует ли неотрицательная функция класса Шварца, преобразование Фурье которой постоянно в окрестности нуля?

б) (1 балл) Существует положительная функция класса Шварца, преобразование Фурье которой неотрицательно и имеет компактный носитель?

4. (1 балл) Покажите, что

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} * \left(\delta_0' * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}\right) \neq (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} * \delta_0') * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}.$$

5. Пусть $\ell^2 = \ell^2_{\mathbb{Z}}$ — пространство двусторонних комплексных последовательностей, суммируемых с квадратом. Для $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ положим $Ta := \{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где $b_m := a_{m-1} + a_{m+1}$.

а) (1 балл) Найдите спектр оператора T.

b) (1.5 балла) Опишите *разложение единицы* (проекторнозначную меру) для оператора T.

6. (1 балл) Существует ли ненулевая обобщённая функция f с носителем в отрезке $(-1,1)$, такая что $\hat{f}(1/n) = e^{-n}$?

7. (2 балла) Существует ли непрерывная рациональная функция $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и ненулевая обобщённая функция $\zeta \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, такие что для некоторых последовательностей $c_k \in \mathbb{R}$ и $\lambda_k \to \infty$ имеет место сходимость $c_k e^{i\lambda_k x} R(x) \to \zeta$.

8. (2 балла) Пусть Ω — ограниченная выпуклая область на плоскости, граница которой есть гладкая кривая невырожденной кривизны. Докажите что $\mathcal{F}[\lambda_1|_{\partial\Omega}](\xi) = O(|\xi|^{-\frac{1}{2}})$ при $\xi \to \infty$, где λ_1 — одномерная мера Лебега (на границе области Ω).

9. (2 балла) Докажите асимптотическое равенство при $\lambda \to +\infty$:

$$\int_0^1 e^{-\lambda e^{-1/x}} dx = 1/\log\lambda + o(1/\log\lambda).$$

Рейтинговые задачи

10. Пусть функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ субгармонична ($\Delta u \geq 0$ в смысле обобщённых функций) и положительно однородна степени 1, то есть, $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda u(x,y)$ при $\lambda > 0$. Докажите, что функция u неотрицательна.

11. Пусть $d \geq 6$, а S_r — сфера радиуса r с центром в начале координта пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ такова, что $\hat{f}(\xi) = 0$, если $\xi \in S_1$. Докажите, что $\|f\|_{L_1(S_{1+\varepsilon})} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in (0,1)$, где интегрирование по сфере ведётся по мере Лебега.

12. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество, а H — счётномерное гильбертово пространство над $\mathbb{C}$. Постройте ограниченный оператор $T\colon H \to H$ такой, что его спектр совпадает с K, причём любая точка $z \in K$ — собственное число оператора T (то есть, найдётся собственный вектор).

13. Докажите, что следующая рациональная функция не есть преобразование Фурье заряда ограниченной вариации:

$$R(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta^3}{(1+\xi^2+\eta^8)(1+(\xi-\eta^4)^2)}.$$

14. Покажите, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\{x^2+y^2\leq R^2\}} e^{-i(\xi x+\eta y)}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-i(\xi x+\eta y)}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$

при $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ и что предел существует.

15. Докажите асимптотическое равенство при $\lambda \to +\infty$:

$$\int\limits_0^1 e^{-\lambda e^{-1/x}} dx = 1/\log\lambda - \gamma/\log^2\lambda + o(1/\log^2\lambda),$$

где γ — константа Эйлера.