

Занятие 12

30.11.22

Начало обобщённых функций

1. Пусть гладкая функция Φ строго выпукла на интервале $[-a, a]$, $\Phi'(0) = 0$, и трижды непрерывно дифференцируема, а функция f гладкая с носителем в этом интервале. Найдите главный член асимптотики интеграла $\int_{-a}^a e^{i\lambda\Phi(x)} f(x) dx$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

2. Вычислите f' , где f — это

- функция Хэвисайда $\chi_{\mathbb{R}_+}$;
- домик, то есть,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1; \\ x + 1, & x \in [-1, 0]; \\ 1 - x, & x \in [0, 1]; \end{cases}$$

- дробная степень, $f(x) = |x|^\alpha$, где $\alpha > 0$.

3. Вычислите $\varphi \cdot \delta_0$.

4. Решите уравнение $f \cdot x = 0$, где f — обобщённая функция.

5. Вычислите ∇f , где f — это

- характеристическая функция квадрата $\chi_{[-1,1]^2}$;
- характеристическая функция шара $\chi_{B_1(0)}$;
- характеристическая функция области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей;