

# Занятие 13

30.11.22

## Обобщённые функции

1. Куда сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  последовательность  $f_n := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[2k/2n, (2k+1)/2n]}$  при  $n \rightarrow +\infty$ ?
2. Приблизьте распределения  $\delta_0, \delta'_0$  в  $\mathcal{D}'$  функциями класса  $L^1(\mathbb{R})$  или хотя бы зарядами. Будет ли сходимость в  $(C^{(k)})^*$  для какого-нибудь  $k \in \mathbb{N}$ ?

3.

- Докажите, что формула

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \text{vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) dx}{x}$$

задаёт обобщённую функцию класса  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- Определите аналогичным образом функцию  $\text{vp} (|x|^\alpha \cdot \text{sign } x)$ , где  $\alpha \in (-2, -1]$ ;
- Вычислите производную функции  $\log |x|$ .

4. Вычислите  $\nabla f$ , где  $f$  — это

- характеристическая функция квадрата  $\chi_{[-1,1]^2}$ ;
- характеристическая функция шара  $\chi_{B_1(0)}$ ;
- характеристическая функция области  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  с гладкой границей;