

Занятие 14. Обобщённые функции

7.12.22

Старые задачи

1.

- Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ — гладкая ориентированная кривая, $\vec{\tau}: \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^d$ — поле единичных векторов, касательных к γ и сонаправленных с ней, $\vec{f} = \vec{\tau} \mathcal{H}^1|_\gamma$ — векторная мера, понимаемая как распределение. Найдите $\operatorname{div} \vec{f}$.
- Найдите $\nabla \chi_{[-1,1]^2}$.
- Найдите $\nabla \chi_{B_1(0)}$.
- Найдите $\nabla \chi_\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с гладкой границей.

Новые задачи

2. Найдите $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\delta_1 * \delta_1 * \dots * \delta_1}_{n \text{ раз}}$. (Бесконечная сумма и свёртка понимаются в смысле обобщённых функций.)

3. Найдите \hat{f} в смысле обобщённых функций, если

1. $f = \delta_0$;
2. $f = \delta'_0$;
3. $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$;
4. $f = 1 + x + x^2$;
5. $f(x) = \exp(2ix)$;
6. $f = d\mathcal{H}^2|_{S^2}$ в \mathbb{R}^3 ;
7. $f = \text{v.p. } 1/x$.

4. Вычислите свёртку $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — отрезки на плоскости \mathbb{R}^2 . Вычислите свёртку $d\lambda_1|_{\ell_1} * d\lambda_1|_{\ell_2}$.

6. Вычислите свёртку $d\lambda_1|_{S^1} * d\lambda_1|_{S^1}$