Экзамен в магистратуру «Современная математика» 2022. Вариант 1.

1. (Алгебра) Дана вещественная 2 на 4 матрица A. Обозначим через M_{ij} её минор порядка 2, получающийся удалением столбцов кроме i-го и j-го. Оказалось, что миноры M_{13} и M_{24} имеют противоположный знак. Докажите, что оставшиеся 4 минора $M_{12}, M_{14}, M_{23}, M_{34}$ не могут быть все положительны.

2. (Геометрия и топология) Внутри n-мерного куба $[-1,1]^n$ отмечена точка P. Для каждой вершины куба рассмотрим прямую, проходящую через эту вершину и точку P и отметим вторую точку пересечения этой прямой с поверхностью куба. Точку P назовём регулярной, если все отмеченные точки лежат внутри $(n-1)$-мерных граней куба. Найдите количество компонент связности множества регулярных точек.

3. (Математический анализ и анализ Фурье) При каких вещественных b и c существует непрерывная функция $f(x,y)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^4+|y|^b+|xy|^c} \text{ при всех } (x,y)\neq(0,0)?$$

4. (Обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы и математическая физика) Динамическая система, задаваемая гомеоморфизмом f на топологическом пространстве X, называется топологически перемешивающей, если для любых непустых открытых множеств U и V существует такое целое неотрицательное число n, что $f^n(U)\cap V\neq\emptyset$ (здесь f^0 — тождественное отображение, $f^n=f(f^{n-1})$ при $n>0$).

На X нашлась непостоянная непрерывная функция $W\colon X\to\mathbb{R}$ такая, что $W(f(x))\leqslant W(x)$ при всех $x\in X$. Докажите, что динамическая система, задаваемая гомеоморфизмом f, не является топологически перемешивающей.

5. (Теория вероятностей) В шоу “Найди свою любовь” участвуют n юношей и n девушек. В течение каждого из m вечеров случайно выбранная пара из юноши и девушки (все n^2 пар равновероятны, каждый вечер выбор происходит независимо от того, что было раньше) идёт на свидание. Пусть X – наибольшее количество пар, которые можно поженить по итогам этих m вечеров так, чтобы любые два супруга хотя бы раз ходили друг с другом на свидание. Докажите, что если $\lim m=\lim n/m=\infty$, то $\mathbb{E}(X)=m-o(m)$.

6. (Дискретная математика) Сколько есть способов заполнить клетки прямоугольный таблицы с 3 столбцами и n строками числами от 1 до $3n$ так, чтобы каждое число было использовано ровно один раз, числа в каждой строке возрастали слева направо, в каждом столбце снизу вверх и на каждой диагонали направления “с юго-востока на северо-запад” — с юго-востока на северо-запад?

7. (Математическая логика и теория множеств) Федя рассматривает все раскраски натурального ряда в синий, белый и красный цвета. Множество раскрасок S устраивает Федю, если оно удовлетворяет такому условию:

если для некоторой раскраски λ для всякого натурального N в S есть раскраска, совпадаюшая с λ на числах от 1 до N, то $\lambda\in S$.

Найдите мощность множества всех устраивающих Федю множеств раскрасок.

8. (Теоретическая информатика) Преподаватель выдал студентам задачу: написать машину Тьюринга, которая будет проверять простоту числа, данного на входе в унарной записи (так, число 3 задано в виде трёхсимвольной строки 111). Студенты сдали свои решения, и теперь преподаватель хотел бы автоматизировать проверку работ, написав алгоритм, который, получив на входе машину Тьюринга, придуманную студентом, проверял бы, действительно ли она решает данную задачу, или в ней есть ошибка. Если такой алгоритм существует, то опишите, как он работает, а если такого алгоритма нет, то докажите, что его нет.