

1 группа. Материалы первого занятия.

Некоторые неравенства

1. Докажите, что если $n \in \mathbb{N}$, а $x > -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$. Когда достигается равенство?
2. Покажите, что последовательность $a_n = (1+1/n)^n$ возрастает, а последовательность $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ убывает, если $n \geq 3$.
3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $\{a_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность вещественных чисел. Докажите, что $\exists m \in \{0, 1, \dots, n\}$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

4. Пусть P — многочлен с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что для достаточно больших чисел n величина $P(n)$ положительна. Приведите явную оценку в терминах коэффициентов многочлена P .
5. Пусть P — многочлен. Докажите, что неравенство $|P(n)| \leq 2^n$ справедливо для достаточно больших чисел n .
6. Найдите какое-нибудь $N \in \mathbb{N}$ такое, что $1.01^n > n^3$ при всех $n > N$.
7. Докажите, что для достаточно больших чисел n справедливо неравенство $\log n \leq \sqrt{n}$.

Ограниченность

8. Запишите при помощи кванторов определение ограниченности множества. Напишите его отрицание.
9. Ограничены ли следующие последовательности?

$$\begin{aligned} & \left\{ 2^{\alpha n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n^{\cos \alpha n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n(\sqrt{n^4 + 1} - n^2) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n^{1 - \cos(\frac{\pi}{n})} \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Супремум и инфимум

10. Существует ли X — подмножество прямой, такое что $\inf X \leq \sup X$? А $\sup X < \inf X$?
11. Приведите пример множества X , такого что $\sup X \notin X$.
12. Найдите супремум и инфимум следующих множеств:

$$\begin{aligned} & \mathbb{N}; \\ & \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\ & \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\ & \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+ \right\}; \\ & \left\{ \sin \alpha n \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Невесть что

13. (*) Докажите неравенство $x^x + y^y \geq x^y + y^x$ для всяких положительных чисел x, y .
14. (*) Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = -x$. Докажите, что у этой функции бесконечное число разрывов.