# 1 группа. Материалы четвёртого занятия.

## Старые задачи

## Пределы

1. Сходится ли эта последовательность? Если да, то вычислите предел и укажите функцию $N(\varepsilon)$.

$$x_0 = a > 0,\ y_0 = b > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

2. Вычислите следующие пределы:

1. $\lim_{x\to 0} x^x$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\tan x}{\tan\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+2^x)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad a, b, c > 0.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(2\frac{n\sqrt{n}-(n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n-2}}\right)$.

## Новые задачи

3. (Теорема Штольца) Пусть последовательность $b_n$ положительна, не ограничена, и возрастает. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{1}$$

если второй предел существует.

4. Вычислите следующие пределы

1. $x_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}}, \quad p > -1;$
2. $x_n = \frac{\sum_{k=1}^n a^k k!}{a^n n!}, \quad a > 0;$

5. Докажите, что последовательность сходится и найдите её предел:

1. $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_1 > -1;$

2. $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}), \quad x_1 > 0, a > 0.$

6. Докажите, что последовательность

$$-\ln n + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

сходится. Её предел называют числом Эйлера $\gamma$. Вычислите также предел последовательности $\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}$.

## Непрерывность

7. Укажите наибольший возможный параметр $\alpha$, такой что следующие функции $\alpha$-гёльдеровы:

- $f(x) = x^\beta, \quad x \in [0, 1];$
- $f(x) = x^\beta, \quad x \geq 0;$
- $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$

## Невесть что

8. (*) Докажите магическое равенство

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\ldots}}}}$$