

2 группа. Материалы второго занятия.

Старые задачи

Некоторые неравенства

1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $\{a_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность вещественных чисел. Докажите, что $\exists m \in \{0, 1, \dots, n\}$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

2. Пусть P — многочлен с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что для достаточно больших чисел n величина $P(n)$ положительна. Приведите явную оценку в терминах коэффициентов многочлена P .

3. Пусть P — многочлен. Докажите, что неравенство $|P(n)| \leq 2^n$ справедливо для достаточно больших чисел n .

4. Найдите какое-нибудь $N \in \mathbb{N}$ такое, что $1.01^n > n^3$ при всех $n > N$.

5. Докажите, что для достаточно больших чисел n справедливо неравенство $\log n \leq \sqrt{n}$.

Новые задачи

Ограниченность

6. Запишите неравенство треугольника при помощи кванторов. Опишите случай равенства при помощи кванторов.

7. Запишите при помощи кванторов определение ограниченности множества. Напишите его отрицание.

8. Ограничены ли следующие последовательности?

$$\begin{aligned} & \{2^{an} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ & \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ & \left\{ \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \{n(\sqrt{n^4 + 1} - n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$