Математический анализ, листок 2

выдан: 3 октября, крайний срок сдачи: 3 ноября

Для получения зачета необходимо решить не менее 2х задач из каждого листка. Задачи, не отмеченные баллами, оцениваются в 0 баллов. Они достаточно просты и в основном служат для отработки понятий из курса лекций. Более сложные задачи добавляют в рейтинг баллы за их решение. Происходит это так: цена задачи z вычисляется по формуле $N + k_z \cdot (N - P)$, где N - общее число студентов, P - число студентов, решивших задачу z, а $k_z \in [1, 3]$ - индивидуальный коэффициент задачи. Баллы за решение задач в конце семестра вычисляются по формуле $70 \cdot \Sigma_S / \Sigma_M$, где Σ_S — суммарная стоимость задач, решенных студентом S, а Σ_M - максимум величины Σ_S по всем S на потоке.

Упражнения

1. Докажите, что если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, то существует предел $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$.

2. Докажите, что если ряд $\sum a_k$ из неотрицательных слагаемых сходится, то найдется ряд $\sum b_k$, который также сходится, причем $a_k = o(b_k)$, $k \to +\infty$.

3. Докажите, что для любой последовательности $\{a_k\}$ со свойством $a_{k+j} \le a_k + a_j$ существует предел $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = \inf_k \frac{a_k}{k}$.

4. Функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется возрастающей в точке $x \in \mathbb{R}$, если она возрастает в некоторой окрестности точки x. Докажите, что функция возрастает на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она возрастает в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

5. Докажите, что множество всех нулей непрерывной функции вещественного аргумента замкнуто. Докажите, что для каждого замкнутого подмножества K вещественной оси $\mathbb{R}$ найдется дифференцируемая функция f, такая, что $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$.

Рейтинговые задачи

6. **[k=1]** Для $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$, обозначим через $N(n)$ максимальный индекс $N \in \mathbb{N}$, такой, что выполнено неравенство $\underbrace{\log\log\ldots\log}_{\text{N раз}} n > 1$. Положим

$$f(n) = n \cdot \log n \cdot \log\log n \cdot \ldots \cdot \underbrace{\log\log\ldots\log}_{\text{N(n) раз}} n.$$

Сходится ли ряд $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$?

7. **[k=1]** Пусть функция $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на $[a, b]$. Докажите, что если $f'(a) < k < f'(b)$, то найдется точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = k$.

8. **[k=1]** Докажите, что если ряд $\sum a_k$ – сходится, то существует предел $\lim_{x\to1,\, x<1} \sum_1^{\infty} a_k x^k = \sum_1^{\infty} a_k$. Постройте пример расходящегося ряда, для которого существует предел $\lim_{x\to1\, x<1} \sum_1^{\infty} a_k x^k$.

9. **[k=2]** Последовательность $\{x_n\}_{n\ge1}$ такова, что для любого $C > 1$ существует предел ее подпоследовательности $\{x_{[C^n]}\}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Докажите, что сама последовательность $\{x_n\}_{n\ge1}$ имеет предел.

10. **[k=2]** Пусть $\{a_k\}_{k\geq 1}$ – произвольная последовательность вещественных чисел. Докажите, что найдется бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что ее производные в нуле удовлетворяют равенствам $f^{(k)}(0) = a_k$, $k \geq 1$.

11. **[k=3]** Пусть $\{(x_j, y_j)\}_{j\leq N}$ — конечный набор точек на плоскости с неотрицательными координатами, а (α, β) — ещё некоторая точка с неотрицательными координатами. Когда сходится двойной ряд

$$\sum_{m,n\geq 0} \frac{m^\alpha n^\beta}{1 + \sum_{j=1}^N m^{x_j} n^{y_j}}?$$

12. **[k=2]** Последовательность $\{x_n\}$ определяется индуктивно: $x_1 = a > 1$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$. Найдите сумму $\sum_1^\infty \frac{1}{x_n}$.