1 группа. Материалы пятого занятия.

Старые задачи

Пределы

1. Докажите, что существует предел выражения $n!/(\sqrt{n}(n/e)^n)$ при $n \to \infty$.

2. Докажите, что последовательность сходится и найдите её предел:

   1. $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_1 > -1;$

   2. $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}), \quad x_1 > 0, a > 0.$

3. Докажите, что последовательность

$$-\ln n + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

сходится. Её предел называют числом Эйлера γ. Вычислите также предел последовательности $\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}$.

Новые задачи

Непрерывность

4. Какие числа $\alpha \in [0,1]$ обладают следующим свойством: для всякой такой непрерывной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, что $f(0) = f(1)$ найдётся такая точка $x \in [0, 1-\alpha]$, что $f(x) = f(x+\alpha)$?

5. Докажите, что любую непрерывную функцию на отрезке можно приблизить липшицевой с любой степенью точности.

6. Докажите, что для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(t)\cos(nt)\,dt = 0.$$

7. Укажите наибольший возможный параметр α, такой что следующие функции α-гёльдеровы:

- $f(x) = x^\beta, \quad x \in [0,1];$
- $f(x) = x^\beta, \quad x \geq 0;$
- $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1,1].$

8. Существует ли непостоянная 2-гёльдерова функция, заданная на отрезке $[0,1]$? А на канторовском множестве?

9. Являются ли эти функции равномерно непрерывными?

- $\sqrt{x}, \quad x \in [1, \infty);$

- $\sin x^2, \quad x \in [1, \infty)$;
- $\frac{1}{\pi - 2\arctan x}, \quad x \in [1, \infty)$;
- $x \log x \quad x \in [0, 1]$.

10. Пусть $f, g \in C([0,1])$ таковы, что $f(0) = g(0) = 0$ и $f(1) = g(1) = 1$. Правда ли, что обязательно найдутся две параметризации $s, t\colon [0,1] \to [0,1]$ (то есть, такие непрерывные функции, что $t(0) = s(0) = 0$ и $t(1) = s(1) = 1$), такие что $f(s(x)) = g(t(x))$ для всякого $x \in [0,1]$?

11. Существует ли такая функция $f \in C([0,1])$, что множество $\{x \in [0,1] \mid f(x) = a\}$ конечно и состоит из чётного числа точек для всякого числа $a \in \mathbb{R}$?