1 группа. Материалы шестого занятия.

Старые задачи

Непрерывность

1. Докажите, что для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(t)\cos(nt)\,dt = 0.$$

2. Являются ли эти функции равномерно непрерывными?

- $\sqrt{x}, \quad x \in [1, \infty);$
- $\sin x^2, \quad x \in [1, \infty);$
- $\frac{1}{\pi - 2\arctan x}, \quad x \in [1, \infty);$
- $x \log x \quad x \in [0, 1].$

3. Существует ли непостоянная 2-гёльдерова функция, заданная на отрезке $[0, 1]$?

4. Укажите наибольший возможный параметр α, такой что следующие функции α-гёльдеровы:

- $f(x) = x^\beta, \quad x \in [0, 1];$
- $f(x) = x^\beta, \quad x \geq 0;$
- $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$

Производная

5. Вычислите $\sin' x$ по определению.

6. Докажите, что отрезок, высекаемый касательной к параболе $y = x^2 + 1$ параболой $y = x^2$, делится точкой касания пополам.

7. Решите уравнение $f(x) + f'(x) = 0$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема.

8. Докажите неравенства

$$\sin x \le \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \ge 0,$$

$$\cos x \le \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\sin x \ge \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \ge 0,$$

$$\cos x \ge \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\ln(1+x) \le \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \ge 0,$$

$$\ln(1+x) \ge \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \ge 0.$$

9. (*) Докажите, что монотонная функция дифференцируема в почти каждой точке.