

# 1 группа. Материалы седьмого занятия.

## Старые задачи Производная

1. Докажите неравенства

$$\sin x \leq \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \geq 0,$$

$$\cos x \leq \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\sin x \geq \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \geq 0,$$

$$\cos x \geq \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\ln(1+x) \leq \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \geq 0,$$

$$\ln(1+x) \geq \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \geq 0.$$

2. (\*) Докажите, что монотонная функция дифференцируема в почти каждой точке.

## Новые задачи

3. Докажите неравенство  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

4. Докажите неравенство  $\sin \tan x \geq x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

5. Найдите пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

6. Представьте функцию  $\frac{1}{1 - \cos x}$  в виде  $P(1/x) + Q(x) + O(x^3)$  ( $x \in (-1, 1)$ ), где  $P, Q$  — полиномы.