

2 группа. Материалы шестого занятия.

Старые задачи

Вычисление пределов

1. (Теорема Штольца) Пусть последовательность b_n положительна, не ограничена, и возрастает. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \quad (1)$$

если второй предел существует.

2. Вычислите следующие пределы

1. $x_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}}, \quad p > -1;$

2. $x_n = \frac{\sum_{k=1}^n a^k k!}{a^n n!}, \quad a > 0;$

3. $x_n = \frac{\sum_{k=1}^n \log k}{n \log n}.$

Новые задачи

Непрерывность

3. Непрерывны ли следующие функции:

1. $\sin 1/x$, если $x \neq 0$ и 0 иначе;

2. $x \sin 1/x$, если $x \neq 0$ и 0 иначе;

3. e^{-1/x^2} при $x > 0$ и 0 иначе;

4. $\{x\} \sin \pi x$?

4. Постройте функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, разрывную в каждой точке, и такую, что функция f^2 непрерывна.

5. Аналогичная задача, но с функцией $g(x) = f(f(x))$ вместо f^2 .

6. Докажите, что уравнение $x = \cos x$ имеет хотя бы одно вещественное решение.

7. Докажите, что уравнение $x = \tan x$ имеет бесконечно много решений.

8. Являются ли эти функции равномерно непрерывными:

• $\sqrt{x}, \quad x \in [1, \infty);$

• $\sin x^2, \quad x \in [1, \infty);$

• $\frac{1}{\pi - 2 \arctan x}, \quad x \in [1, \infty);$

• $x \log x \quad x \in [0, 1]?$