Математический анализ, листок 3 (Ноябрь, 2023)

выдан: 13 ноября, крайний срок сдачи: 13 декабря

Упражнения

1. Найти все такие непрерывные на отрезке $[0,1]$ и n раз дифференцируемые на его внутренности функции f, что $f^{(n)}(x)=0$ при всех $x \in (0,1)$.

2. Пусть A – открытое множество, $A \subset \mathbb{R}^2$. Положим

$$d(x) = \inf\{|x-y| \colon y \in \mathbb{R}^2 \setminus A\}.$$

Доказать, что для любых $x, y \in A$ имеет место неравенство $|d(x)-d(y)| \le |x-y|$.

3. Пусть $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^y = y^x,\ x > 0,\ y > 0\}$. Найти точки пересечения множества A с окружностью радиуса $\sqrt{30}$ и центром в начале координат.

4. Предположим, что функция f дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) > 0$. Веда ли найдется такая окрестность точки x_0, что функция f будет возрастать в этой окрестности?

Рейтинговые задачи

5. **[1 балл]** Пусть L – множество функций на отрезке $[0,1]$, имеющих в каждой точке $x_0 \in [0,1]$ один из пределов $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim_{x\to x_0+} f(x)$. Верно ли, что множество M имеет мощность континуума?

6. **[2 балла]** Пусть дан многочлен $p(x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$, $c_5 \neq 0$. Предположим, что все нули его производной вещественны. Докажите, что среди них найдется такой, что $|p(x)| < \frac{2}{3}|x|$. **[1 дополнительный балл]** Найдите инфимум положительных чисел, на которые можно заменить число $2/3$ в неравенстве.

7. **[1 балл]** Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1,1]$, $f'(0) > 0$, а также удовлетворяет оценкам $c|x| < |f(x)| < |x|$ для некоторой положительной константы c и всех $x \in (-1,1), x \neq 0$. Верно ли, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f \circ f_3 \circ f_{3^2} \circ \cdots \circ f_{3^n}(x)$$

в каждой точке $x \in (-1,1)$? Здесь $f_n(x) = \sqrt[n]{f(x^n)}$.

8. **[1 балл]** Пусть $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Доказать, что

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \le |\sqrt{x^2+y^2}-1| + \sqrt{x^2+y^2}|\arctan{(y/x)}|.$$

9. **[1 балл]** Предположим, что функция f дважды дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$, причем ее вторая производная равномерно ограничена. Верно ли, что если $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$? Ответ обоснуйте.

10. **[2 балла]** Найти наибольшее возможное число K, удовлетворяющее оценке

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \ge K$$

для всех таких последовательностей $\{x_n\}_n$ положительных чисел.