1 группа. Материалы восьмого занятия.

Старые задачи

Производная

1. Найдите пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

2. Представьте функцию $\dfrac{1}{1-\cos x}$ в виде $P(1/x)+Q(x)+O(x^3)$ $(x\in(-1,1))$, где P, Q — полиномы.

Новые задачи

3. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}-2\sqrt{n}).$$

4. Разложите следующие функции в ряд Тейлора

   1. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x-x^2}$ до порядка x^3 включительно;
   2. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до порядка x^{13} включительно;
   3. $\ln\cos x$ до порядка x^6 включительно.

5. Вычислите $\sin 1$ с точностью до $\frac{1}{100}$. (Ответ можно дать в виде рациональной дроби.)

6. Пусть функция $f\in C^3([0,\infty))$ такова, что функции f, f', f'' и f''' строго положительны при $x\geq 0$. Докажите, что существует константа $a>0$, такая что $f(x)\geq ax^2$ при всех $x\geq 0$.

7. Пусть $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ — выпуклая функция. Докажите, что функция $s\mapsto sf(1/s)$ — тоже выпуклая.

8. Докажите, что выпуклая функция дифференцируема слева и дифференцируема справа.

9. Пусть f — функция на прямой. Зададим функцию f^*, называемую преобразованием Лежандра функции f, согласно формуле

$$f^*(\zeta)=\sup_x\big(\zeta x - f(x)\big).$$

- Докажите, что f^* — выпуклая функция;
- Докажите, что если сама функция f выпукла, то имеет место равенство $f=f^{**}$;

- Пусть f — строго выпуклая функция и пусть f дифференцируема в окрестности точки x_0. Докажите, что функция f^* дифференцируема в окрестности точки $f'(x_0)$ и имеет место равенство $(f^*)'(f'(x_0)) = x_0$.

10. Вычислите преобразование Лежандра следующих функций

- $f(x) = cx^2$;
- $f(x) = e^x$;
- $f(x) = x$.