

# 1 группа. Материалы девятого занятия.

## Старые задачи

### Выпуклость

1. Пусть  $f$  — функция на прямой. Зададим функцию  $f^*$ , называемую преобразованием Лежандра функции  $f$ , согласно формуле

$$f^*(\zeta) = \sup_x (\zeta x - f(x)).$$

- Докажите, что  $f^*$  — выпуклая функция;
  - Докажите, что если сама функция  $f$  выпукла, то имеет место равенство  $f = f^{**}$ .
2. Вычислите преобразование Лежандра следующих функций
- $f(x) = cx^2$ ;
  - $f(x) = e^x$ ;
  - $f(x) = x$ .

## Новые задачи

### Графики функций

3. Изобразите графики следующих функций, исследовав их естественные области определения, промежутки монотонности, выпуклости, точки пересечения с осями, асимптоты и симметрии:

1.  $|x + 1| + |x - 1| - 2|x|$ ;
2.  $e^{\sqrt{x}}$ ;
3.  $\frac{x}{x+1}$ ;
4.  $\frac{\sin x}{x}$ ;
5.  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ ;
6.  $\cos \log x$ ;
7.  $\log \cos x$ ;
8.  $x \sqrt{\frac{x}{x-10}}$ ;
9.  $\frac{1}{1-2^{1-\frac{x}{e}}}$ ;
10.  $\log(x^2 - 3x + 2)$ ;
11.  $\frac{x^3 - 4x^2 - 56x + 224}{x^2 - 10x + 4}$ .