2 группа. Материалы десятого занятия.

Старые задачи

Выпуклые функции на промежутках

1. Докажите, что, тем не менее, в каждой точке у выпуклой функции определены левая и правая производная; причём левая меньше либо равна правой. Каждая и из этих односторонних производных монотонна.

2. Докажите, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для каждой точки x существует *опорная* функция $\ell_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то есть, такая аффинная функция, что

$$\ell_x(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \forall y\ f(y) \geq \ell_x(y).$$

3. Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Докажите, что она выпукла тогда и только тогда, когда функция f' монотонна.

4. Докажите, что дважды непрерывно дифференцируемая функция выпукла тогда и только тогда, когда ее вторая производная не принимает отрицательных значений.

5. Изучите промежутки выпуклости функций

- x^2;
- $(x^2-1)(x^2-4)$;
- e^x;
- $\sin x$;
- e^{-x^2};
- $(1+x^2)^{-1}$.

Новые задачи

6. Докажите неравенство Йенсена: для всякой выпуклой функции Φ, всякого набора точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и всяких неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с суммой 1 справедлива оценка

$$\Phi(\sum_j \alpha_j x_j) \leq \sum_j \alpha_j \Phi(x_j).$$

7. Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

для всякого набора положительных чисел.

8. Докажите неравенство о средних в более общей форме: пусть

$$S_q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{\sum_j a_j^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}},$$

здесь числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ положительны.

- Докажите неравенство $S_1 \leq S_q$ при $q \geq 1$.
- Докажите, что функция $q \mapsto S_q$ не убывает.

9. Докажите неравенство $e^{ty} \leq \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $y \in [-1, 1]$.