

## 2 группа. Материалы восьмого занятия.

### Старые задачи

1. Являются ли эти функции равномерно непрерывными:

- $\frac{1}{\pi - 2 \arctan x}$ ,  $x \in [1, \infty)$ ;
- $x \log x$   $x \in [0, 1]$ ?

### Новые задачи

#### Производная

2. Вычислите  $\sin' x$  по определению.

3. Докажите, что отрезок, высекаемый касательной к параболе  $y = x^2 + 1$  параболой  $y = x^2$ , делится точкой касания пополам.

4. Решите уравнение  $f(x) + f'(x) = 0$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема.

5. Докажите неравенства

$$\sin x \leq \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \geq 0,$$

$$\cos x \leq \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\sin x \geq \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \geq 0,$$

$$\cos x \geq \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\ln(1+x) \leq \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \geq 0,$$

$$\ln(1+x) \geq \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \geq 0.$$

6. Докажите неравенство  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

7. Докажите неравенство  $\sin \tan x \geq x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .