

2 группа. Материалы девятого занятия.

Старые задачи

1. Докажите неравенство $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Докажите неравенство $\sin \tan x \geq x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Новые задачи

Выпуклые функции на промежутках

3. Пусть $D(a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, если $a < b$ и эти числа лежат в области определения функции f . Докажите, что если функция f выпукла, то

$$D(a, b) \leq D(c, d), \quad a \leq c, b \leq d.$$

4. Если функция f выпукла, то она локально липшицева и, следовательно, непрерывна.
5. Приведите пример не дифференцируемой выпуклой функции.
6. Докажите, что, тем не менее, в каждой точке u выпуклой функции определены левая и правая производная; причём левая меньше либо равна правой. Каждая и из этих односторонних производных монотонна.
7. Докажите, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для каждой точки x существует *опорная* функция $\ell_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то есть, такая аффинная функция, что

$$\ell_x(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \forall y \quad f(y) \geq \ell_x(y).$$

8. Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Докажите, что она выпукла тогда и только тогда, когда функция f' монотонна.
9. Докажите, что дважды непрерывно дифференцируемая функция выпукла тогда и только тогда, когда ее вторая производная не принимает отрицательных значений.
10. Изучите промежутки выпуклости функций

- x^2 ;
- $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$;
- e^x ;
- $\sin x$;
- e^{-x^2} ;
- $(1 + x^2)^{-1}$.