Оператор Ходжа–Лапласа на евклидовом пространстве

Д. М. Столяров

5 декабря 2023 г.

Цель этой заметки — показать, что оператор Ходжа–Лапласа Δ_{H} на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ совпадает с точностью до знака с классическим оператором Лапласа. Более точно, мы покажем, что

$$\Delta_{\mathrm{H}}\Big(\sum_I a_I\, dx^I\Big) = -\sum_I \Delta a_I\, dx^I. \tag{1}$$

Пусть $\#I = p \in [0\,..\,d]$. Опишем действие дифференциала и кодифференциала на элементарную p-форму $w = a_I\, dx^I$. Функция $a_I\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ предполагается гладкой с компактным носителем. Вычисление для дифференциала:

$$dw = \sum_{j\notin I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^j \wedge dx^I = \sum_{j\notin I} (-1)^{\epsilon(\{j\},I)} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{\{j\}\cup I}. \tag{2}$$

Поясним обозначения. Под формой dx^K, где K — множество индексов, мы понимаем форму $dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \ldots \wedge dx_{k_p}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — перечисленные по возрастанию элементы K. Символ $\epsilon(K,L)$, где K и L — не пересекающиеся множества индексов, означает число перестановок, необходимых для приведения последовательности K, L (каждое из множеств записано в лексиграфическом порядке) к лексикографическому порядку. Приведём вычисление для кодифференциала, пользуясь выражающей его через дифференциал формулой:

$$\begin{aligned}
\partial w = (-1)^{d(p-1)+1} \star\, d \star w = (-1)^{d(p-1)+1+\epsilon(I,\bar{I})} \star d\Big[a_I dx^{\bar{I}}\Big]& \\
= (-1)^{d(p-1)+1+\epsilon(I,\bar{I})} \star \sum_{j\in I} (-1)^{\epsilon(\{j\},\bar{I})} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{\bar{I}\cup\{j\}}& \\
= (-1)^{d(p-1)+1+\epsilon(I,\bar{I})} \sum_{j\in I} (-1)^{\epsilon(\{j\},\bar{I})+\epsilon(\bar{I}\cup\{j\},I\setminus\{j\})} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{I\setminus\{j\}}&.
\end{aligned} \tag{3}$$

Вычислим пока что значение квадратичной формы, порождающей лапласиан Ходжа, на базисных формах:

$$\langle \Delta_{\mathrm{H}} w, w\rangle = \langle dw, dw\rangle + \langle \partial w, \partial w\rangle = \sum_{j\notin I} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial a_I}{\partial x_j}\Big|^2 + \sum_{j\in I} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial a_I}{\partial x_j}\Big|^2, \tag{4}$$

что совпадает с минус квадратичной формой для классического лапласиана. Однако просто совпадение значений квадратичных форм на элементах базиса не влечёт совпадения самих квадратичных форм. Требуется доказать тождество $\langle \Delta_{\mathrm{H}} w_1, w_2\rangle = 0$, где w_1 и w_2 — базисные формы, соответствующие различным индексным множествам I_1 и I_2. Нетрудно видеть из формул (2) и (3), что указанное скалярное произведение может быть не равно нулю только в случае $\#(I_1 \cap I_2) = p-1$. В противном случае в суммах для дифференциалов и кодифференциалов w_1 и w_2 участвуют только различные элементарные формы.

Рассмотрим оставшийся случай $\#(I_1 \cap I_2) = p-1$. Положим $I = I_1 \cap I_2$, $I_1 = \{i_1\} \cup I$ и $I_2 = \{i_2\} \cup I$. В таком случае,

$$\langle dw_1, dw_2 \rangle = (-1)^{\epsilon(\{i_1\}, I_2) + \epsilon(\{i_2\}, I_1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_2}. \tag{5}$$

Как обычно, для кодифференциалов формула имеет слегка более сложный вид:

$$\langle \partial w_1, \partial w_2 \rangle = (-1)^{\epsilon(I_1, \bar{I}_1) + \epsilon(I_2, \bar{I}_2) + \epsilon(\{i_1\}, \bar{I}_1) + \epsilon(\{i_2\}, \bar{I}_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_2}. \tag{6}$$

Двукратное интегрирование по частям устанавливает справедливость формулы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_2} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, для доказательства равенства нулю скалярного произведения, достаточно доказать тождество

$$\epsilon(\{i_1\}, I_2) + \epsilon(\{i_2\}, I_1) + \epsilon(I_1, \bar{I}_1) + \epsilon(I_2, \bar{I}_2) + \epsilon(\{i_1\}, \bar{I}_1) + \epsilon(\{i_2\}, \bar{I}_2) \equiv_2 1. \tag{8}$$

Подметим тождества

$$\epsilon(I_1, \bar{I}_1) + \epsilon(\{i_1\}, \bar{I}_1) \equiv_2 \epsilon(I, \bar{I}_1); \tag{9}$$
$$\epsilon(I_2, \bar{I}_2) + \epsilon(\{i_2\}, \bar{I}_2) \equiv_2 \epsilon(I, \bar{I}_2). \tag{10}$$

Поэтому достаточно доказать

$$\epsilon(\{i_1\}, I_2) + \epsilon(\{i_2\}, I_1) + \epsilon(I, \bar{I}_1) + \epsilon(I, \bar{I}_2) \equiv_2 1. \tag{11}$$

Преобразуем левую часть, пользуясь аналогичными соображениями:

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\{i_1\}, I_2) + \epsilon(\{i_2\}, I_1) + \epsilon(I, \bar{I}_1) + \epsilon(I, \bar{I}_2) \\
&\qquad \equiv_2 \epsilon(\{i_1\}, I) + \epsilon(\{i_1\}, \{i_2\}) + \epsilon(\{i_2\}, I) + \epsilon(\{i_2\}, \{i_1\}) + \epsilon(I, \bar{I}_1) + \epsilon(I, \bar{I}_2) \\
&\qquad \equiv_2 1 + \epsilon(\{i_1\}, I) + \epsilon(\{i_2\}, I) + \epsilon(I, \bar{I}_1) + \epsilon(I, \bar{I}_2) \\
&\qquad \equiv_2 1 + 2\#I + \epsilon(I, \{i_1\}) + \epsilon(I, \{i_2\}) + \epsilon(I, \bar{I}_1) + \epsilon(I, \bar{I}_2) \\
&\qquad \equiv_2 1 + \epsilon(I, J) + \epsilon(I, J) \equiv_2 1,
\end{aligned} \tag{12}$$

здесь $J = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2$. Таким образом, доказано тождество (8), а с ним и основное утверждение (1).