

Экзамен в магистратуру «Современная математика» 2023 Вариант 1.

1. (Алгебра) Квадратные  $n \times n$ -матрицы  $A, B$  с вещественными коэффициентами удовлетворяют равенству  $AB - BA = A$ . Докажите, что  $A^n = 0$ .

2. (Геометрия и топология) В параллелограмме, площадь которого равна 1, вписан эллипс, касающийся всех его сторон. Одна из диагоналей параллелограмма делится точками пересечения с эллипсом на три равных отрезка. Какие значения при этих условиях может принимать площадь эллипса?

3. (Математический анализ и анализ Фурье) Является ли функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx^2}{n^3}$$

непрерывно дифференцируемой на  $\mathbb{R}$ ?

4. (Обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы и математическая физика)

При каких значениях вещественного параметра  $a$  существует единственная ограниченная на всей оси непрерывно дифференцируемая функция  $x(t)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dx}{dt} + a \cdot x(t) = 1?$$

5. (Теория вероятностей) Элементы квадратной матрицы  $A$  порядка  $2n$  выбираются случайно и независимо: каждый элемент равен с вероятностью  $1/2$  нулю и с вероятностью  $1/2$  единице. Найдите математическое ожидание определителя матрицы  $A - A^t$ , где  $A^t$  — матрица, транспонированная к  $A$ .

6. (Дискретная математика) При данном  $n > 2$  раскроем скобки в произведении

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)$$

и приведём подобные члены. Сколько получится разных одночленов?

7. (Математическая логика и теория множеств) Семейство  $\mathcal{F}$  множеств натурального ряда называется удачным, если вместе с каждым множеством  $A \in \mathcal{F}$  любое подмножество  $B \subset A$  множества  $A$  также принадлежит  $\mathcal{F}$ . Найдите мощность множества всех удачных семейств.

8. (Теоретическая информатика) Конечный неориентированный граф (без кратных рёбер и петель) задан списком из  $n$  вершин и  $m$  рёбер. Требуется определить, существует ли способ ориентировать каждое ребро так, чтобы ориентированный граф получился сильно связным.

Приведите алгоритм, решающий эту задачу за время  $O(m + n)$ . (Алгоритмы, работающие медленнее, могут оцениваться как частичные продвижения).

*запрещается распространять, в том числе в сети Интернет, до 4 августа 2023 г.*