1 группа. Материалы двенадцатого занятия.

Старые задачи

Вычисление первообразных

1. Вычислите следующие первообразные:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}\,dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\log(x+\sqrt{x^2+1})}\,dx,$$
$$\int \frac{a^2x-1}{\sqrt{a^x}}\,dx,$$

Новые задачи

2. Найдите рекуррентную формулу для интеграла

$$J_n = \int x^n(ax^2+bx+c)^{-1/2}\,dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

и посчитайте

$$\int x^3(x^2+4x+5)^{-1/2}\,dx.$$

Определённые интегралы

3. Вычислите определённые интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z};$$
$$\int\limits_{-1}^{1} \sin x^3\,dx;$$
$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. Вычислите производные следующих функций переменной x:

$$\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt;$$

$$\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3\,dt.$$

5. Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ монотонна. Докажите оценку

$$\Big|\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| = O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

6. Вычислите

$$\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx + \int\limits_1^3 \sqrt[3]{x^2-1}\,dx.$$

7. Вычислите пределы следующих последовательностей:

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{j}{n}};$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\sin\frac{\pi k}{n^2};$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}.$$

Сходимость рядов и интегралов

8. Сходятся ли абсолютно эти ряды? А просто сходятся ли?

$$\sum_{n\ge1} a^n, \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1} n^p, \qquad p \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n\log n};$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n};$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{\cos n}{n^p}, \qquad p > 0;$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n};$$

$$\sum_{n\ge1}(2\operatorname{arctg}(n^2)-\pi);$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{\cos n^2}{n}.$$