1 группа. Материалы тринадцатого занятия.

Старые задачи

1. Вычислите пределы следующих последовательностей:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{\pi k}{n^2};$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}.$$

Новые задачи

Сходимость рядов

2. Сходятся ли абсолютно эти ряды? А просто сходятся ли?

$$\sum_{n\geq 1} a^n, \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\geq 1} n^p, \qquad p \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log n};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^p}, \qquad p > 0;$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos \sqrt{n}}{n};$$

Вывод формулы Стирлинга из интегралов Валлиса

3. Докажите, что последовательность

$$n^{-\frac{1}{2}} \Big(n/e\Big)^{-n} n!$$

сходится.

4. Пусть $W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Мы знаем соотношения $W_n = \frac{n}{n-1} W_{n-2}$ и

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{((2p)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2};$$
$$W_{2p+1} = \frac{((2p)!!)^2}{(2p+1)!}.$$

Докажите, что $\sqrt{n/(2\pi)}W_n \to 1$.

5. Докажите, что предел из предпредыдущей задачи равен единице.