

## Программа курса «Анализ на гладких многообразиях»

1. Элементы мультилинейной алгебры: мультилинейные отображения, тензорные произведения, симметричные и антисимметричные тензоры.
2. Альтернирование и внешнее произведение. Звёздочка Ходжа.
3. Дифференциальные формы в евклидовом пространстве, их пересадки и внешнее произведение. Примеры.
4. Дифференциал форм, его характеристикация.
5. Замкнутые и точные формы. Теорема Пуанкаре.
6. Пример замкнутой неточной формы.
7. Выражение классических дифференциальных операторов через дифференциал форм.
8. Векторные расслоения. Определение, задание через отображения склейки.
9. Сечения. Дополнение локальной системы сечений до базисной. Связь локальных базисных систем с тривиализациями. Пример нетривиального расслоения.
10. Гомоморфизмы векторных расслоений. Подрасслоения. Ядро и образ гомоморфизма.
11. Нормальное расслоение. Тензорное произведение расслоений.
12. Дифференциальные формы на многообразиях. Пересадка формы. Примеры.
13. Дифференциал формы. «Бескоординатная» формула для дифференциала.
14. Ориентация многообразия. Задание ориентации подмногообразия коразмерности один векторным полем.
15. Формула замены переменной в интеграле (формула площади). Интеграл формы по многообразию. Примеры.
16. Многообразие с краем, ориентация края. Теорема Стокса, следствия и примеры к ней.
17. Многообразие с углами (обзорно). Интегралы замкнутой формы по гомотопным путям равны. Замкнутая 1-форма на односвязном многообразии точна.
18. Теорема Уитни об аппроксимации. Существование трубчатой окрестности.
19. Всякое непрерывное отображение гомотопно гладкому. Теорема о сглаживании гомотопий.
20. Когомологии де Рама. Определения, примеры. Гомотопическая инвариантность групп когомологий.
21. Простейшие вычисления. Связь первых когомологий с фундаментальной группой.
22. Теорема Майера—Вьеториса (без доказательства леммы о зигзаге).
23. Когомологии сферы. Следствия.
24. Теорема Пуанкаре для форм с компактным носителем. Когомологии де Рама с компактным носителем.
25. Высшие когомологии ориентируемых многообразий.
26. Сингулярные гомологии (обзорно).
27. Оператор де Рама, его «естественность».
28. Теорема де Рама.
29. Звёздочка Ходжа на римановом многообразии. Скалярное произведение дифференциальных форм.
30. Кодифференциал. Формула для него и примеры.
31. Оператор Лапласа. Совпадение с классическим оператором Лапласа на евклидовом пространстве.
32. Вычисление оператора Лапласа от функции в координатах. Связь с классическим оператором Лапласа—Бельтрами.
33. Пространства Соболева на многообразии. Теоремы вложения и компактности для пространств Соболева.
34. Неравенство Гординга.
35. Первая и вторая теоремы Ходжа.