Математический анализ, листок 4. С Новым Годом!

выдан: 1 января, крайний срок сдачи: 1 марта

Упражнения

1. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Будем называть функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$ липшицевой с константой L, если для всяких $x, y \in M$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq L\rho(x, y).$$

Пусть $S \subset M$, $f\colon S \to \mathbb{R}$ — липшицева с константой L функция. Докажите, что существует такая липшицева с константой L функция $F\colon M \to \mathbb{R}$, называемая продолжением f, что $F|_S = f$.

2. Пусть f и g суть кусочно-монотонные непрерывные функции на положительной полуоси, имеющие лишь конечное число интервалов монотонности. Пусть f стремится к нулю на бесконечности, а несобственный интеграл $\int_0^\infty f(x)dg(x)$ сходится. Докажите, что функция fg тоже стремится к нулю на бесконечности, интеграл $\int_0^\infty g(x)df(x)$ сходится, а также верна формула

$$\int\limits_0^\infty f(x)dg(x) = -f(0)g(0) - \int\limits_0^\infty g(x)df(x).$$

3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\pi(x)}{x^3-x}\,dx$, где $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x.

4. Докажите, что при всяком положительном x уравнение $z^3+zx = 8$ имеет единственный корень $z(x)$ и вычислите интеграл $\int_0^7 z^2(x)\,dx$.

5. Вычислите $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x^n\,dx$.

Рейтинговые задачи

6. Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f(x) = f(x/2) + f((x+1)/2)$ для всех $x \in [0,1]$. Верно ли, что $f(x) = c(1-2x)$, если а)**[1]** f — дифференцируемая функция б)**[2]** f — непрерывная функция?

7. **[2]** Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка. Докажите неравенство

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leq \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx.$$

8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, а $\delta\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ — произвольная непрерывная функция.

a) **[1]** Докажите, что если функция f не является аффинной, то существует такая выпуклая функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) < g(x) < f(x) + \delta(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$.

b) **[1]** Докажите, что если функция f не совпадает с аффинной функцией в окрестности как $+\infty$, так и $-\infty$, то существует такая выпуклая функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) - \delta(x) < g(x) < f(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$.

c) **[1]** Докажите, что функцию g в обоих предыдущих пунктах можно выбрать дифференцируемой.

9. **[3]** Пусть $q > 1$. Положим

$$F(t) = \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + tx - |x|^q}},$$

где x_1 и x_2 — корни знаменателя. При каких значениях q справедливо тождество $F'(0) = 0$?