

1 группа. Материалы первого занятия.

Новые задачи

Сходимость рядов и интегралов

1. Сходятся ли абсолютно эти ряды? А просто сходятся ли?

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \log \frac{n-1}{n+1}; \\ & \sum_{n \geq 1} (2 \operatorname{arctg}(n^2) - \pi); \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^p}, \quad p > 0; \\ & \sum_{n \geq 2} \frac{\sin(n + 1/n)}{\log \log n}; \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos \sqrt{n}}{n}; \\ & (*) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n^2}{n}. \end{aligned}$$

2. Докажите тождество

$$\sum_{r=1}^m \cot^2 \frac{\pi r}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Выведите из него формулу $\sum_{n \geq 1} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Исследуйте следующие интегралы на сходимость и абсолютную сходимость. Вычислите их (по возможности).

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |x|^p dx; \\ & \int_{-1}^1 \frac{|\log |x||^q dx}{x}; \\ & \int_{-1}^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}. \end{aligned}$$