2 группа. Материалы первого занятия.

Новые задачи
Вычисление первообразных

1. Вычислите следующие первообразные:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1},$$

$$\int \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\, dx,$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx.$$

2. Вычислите определённые интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{imx}\, dx, \qquad m \in \mathbb{Z};$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin x^3\, dx;$$

$$\text{(Интегралы Валлиса)} \quad W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Более точно, для последнего интеграла докажите рекурентную формулу $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$, $n \geq 2$. Докажите, что последовательность $n! e^n n^{-n-1/2}$ имеет конечный ненулевой предел (здесь уместно прологарифмировать и использовать техники, близкие к теореме Штольца). Воспользовавшись монотонностью последовательности W_n и явной формулой для этих чисел, докажите формулу Стирлинга

$$n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

3. Вычислите

$$\int\limits_0^2 \sqrt{1 + x^3}\, dx + \int\limits_1^3 \sqrt[3]{x^2 - 1}\, dx.$$

4. Вычислите производные следующих функций переменной x:

$$\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1 + t^2}\, dt;$$

$$\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3\, dt.$$

5. Вычислите пределы следующих последовательностей:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{j}{n}};$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{\pi k}{n^2};$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}.$$