# 2 группа. Материалы второго занятия.

## Старые задачи

## Определённые интегралы

1. Пусть

$$W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Докажите рекурентную формулу $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$, $n \geq 2$. Докажите, что последовательность $n! e^n n^{-n-1/2}$ имеет конечный ненулевой предел (здесь уместно прологарифмировать и использовать техники, близкие к теореме Штольца). Воспользовавшись монотонностью последовательности $W_n$ и явной формулой

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}; \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

для этих чисел, докажите формулу Стирлинга

$$n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2. Вычислите

$$\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx + \int\limits_1^3 \sqrt[3]{x^2-1}\, dx.$$

3. Вычислите производные следующих функций переменной $x$:

$$\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt;$$

$$\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3\, dt.$$

4. Вычислите пределы следующих последовательностей:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{1 + \frac{j}{n}};$$

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin^2 \frac{\pi j}{n};$$

$$x_n = \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{\pi k}{n^2}.$$

# Новые задачи

## Сходимость рядов

5. Сходятся ли абсолютно эти ряды? А просто сходятся ли?

$$\sum_{n\geq 1} a^n, \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\geq 1} n^p, \qquad p \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\log n};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n};$$

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \log\frac{n-1}{n+1};$$

$$\sum_{n\geq 1} (2\operatorname{arctg}(n^2)-\pi);$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^p}, \qquad p > 0;$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\sqrt{n}}{n}.$$