

1 группа. Материалы восьмого занятия.

Старые задачи

Дифференциал

1. Найдите производную данной функции в данном направлении в данной точке.
 - $f(x, y) = x \sin(x + y)$, направление $(-1, 0)$, точка $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
 - $\log(x^2 + y^2 + z^2)$, направление $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, точка $(1, 2, 1)$;
 - $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$, направление $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3})$, точка $(1, 3, 2, 1)$.
2. Пусть f — непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов. Вычислите дифференциал следующих функций
 - $f(t, t^2, t^3)$, где $t \in \mathbb{R}$;
 - $f(x^2 + y^2 + z^2)$ где $x, y, z \in \mathbb{R}$;
 - $f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$, где $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Даны непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция f и число $p \in \mathbb{R}$. Докажите, что дифференциальное уравнение $\sum x_i \partial f / \partial x_i = p f$ равносильно положительной однородности порядка p : $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$ при $t > 0$.

Экстремумы

4. Исследуйте следующие функции на экстремумы:
 1. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$;
 2. $u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x$;
 3. $u = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$;
 4. $f(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на заданном множестве
 1. $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1$;
 2. $f(x, y) = (x + y)e^{xy}, -2 \leq x + y \leq 1$;
 3. $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y), x + y \leq 2\pi, x \geq 0, y \geq 0$;
 4. $f(x, y) = y^4 - x^4, x^2 + y^2 \leq 9$.