Математический анализ, листок 6.

выдан: 18 апреля, крайний срок сдачи: 17 мая

Упражнения

1. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна вместе со своими первыми производными, обращается в нуль в начале координат и удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2|x-y|; \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2|x-y|.$$

Докажите неравенство $f(5,4) \leqslant 1$. Может ли достигаться равенство?

2. Пусть поверхность M задана уравнением $z = f(x,y)$, где $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Докажите, что если в некоторой точке поверхности $A = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ имеет место соотношение $f_{xx}f_{yy} \neq f_{xy}^2$, то найдется такая окрестность точки A, что касательная к M в точке A плоскость лежит по одну сторону от поверхности в этой окрестности.

3. На плоскости даны точки $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots n$. При каком положении прямой $ax + by + c = 0$, сумма квадратов расстояний от точек A_i до нее будет наименьшей?

4. Пусть $b > 0$. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)}{b\cdot 2b\cdots nb}x^n.$$

5. Пусть функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ такова, что для любой функции $\varphi \in C^1([0,1],\mathbb{R}^2)$ суперпозиция $f\circ\varphi$ лежит в классе $C^1([0,1])$. Верно ли, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Рейтинговые задачи

6. Пусть F — дважды непрерывно-дифференцируемая функция на плоскости, удовлетворяющая уравнению

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\end{vmatrix}(x,y) = h(x,y),$$

где h — строго положительная непрерывная функция (то есть, существует такое число $\delta > 0$, что для всяких $x, y \in \mathbb{R}$ верно $h(x,y) > \delta$). Рассмотрим функцию $F^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную уравнением

$$F^*(p,q) = px + qy - F(x,y), \quad p = F_x(x,y), q = F_y(x,y).$$

а) **[1]** Докажите, что функция F^* корректно определена на всей плоскости. б) **[1]** Докажите, что функция F^* дважды непрерывно дифференцируема и выпукла. в) **[2]** Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция F^*?

7. **[1]** Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — комплексные числа. Докажите, что для некоторого множества $A \subset [1\,..\,n]$ справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k \in A} \omega_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\omega_k|.$$

8. **[3]** Пусть f — такая трижды непрерывно дифференцируемая функция, что f' строго выпукла на $(-\infty, 0)$ и строго вогнута на $(0, \infty)$. Докажите, что существуют единственные такие диффернцируемые функции $a\colon (0,\infty) \to (-\infty, 0)$ и $b\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, что для всякого положительного числа ℓ справедливо равенство

$$\frac{f'(a) + f'(b)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad a = a(\ell), b = b(\ell),\ b(\ell) - a(\ell) = \ell.$$

9. **[1]** Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, Z_Φ — множество её нулей. Предположим, что множество критических точек функции Φ не пересекается с Z_Φ. Докажите, что для всякой гладкой функции ψ, равной нулю на Z_Φ, функция ψ/Φ гладкая.

10. **[2]** Будем говорить, что функция $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ координатно выпукла, если для всяких $x, y \in \mathbb{R}$ функции

$$t \mapsto F(x,t) \quad \text{и} \quad t \mapsto F(t,y)$$

выпуклы. Рассмотрим такую функцию F. Докажите, что след этой функции на диагонали $\{x = y\}$ не может иметь "отрицательного скачка производной":

$$\lim_{t \to 0+} \frac{F(t,t) - F(0,0)}{t} + \lim_{t \to 0-} \frac{F(0,0) - F(t,t)}{t} \geqslant 0.$$