1 группа. Материалы одиннадцатого занятия.

Старые задачи

Теорема о неявной функции

1. Найдите первый (и в первом пункте — второй) дифференциал неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a$;
2. $z^3 - 3xyz = a$;
3. $xyz = x + y + z$;
4. $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$;
5. $F(xz, yz) = 0$.

Новые задачи

2. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $u = 1$, $v = 1$, где

$$\begin{cases} x = u + \ln(v); \\ y = v - \ln(u); \\ z = 2u - v. \end{cases}$$

3. Пусть функция $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ подходит под условие теоремы о неявной функции для любой пары переменных (в окрестности некоторой точки) и задаёт неявные функции $x(y, z)$, $y(x, z)$ и $z(x, y)$. Докажите тождество

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Асимптотики неявных функций

4. Найдите три первых члена асимптотического разложения неявной функции $y = y(x)$ в окрестности указанной точки (и докажите корректность определения такой функции).

1. $\sin y = x + y^3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
2. $\sin y = y + x^3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
3. $e^y = y + y^2/2 + x^3$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

5. Рассмотрим уравнение $we^w = x$. Докажите, что при $x > 0$ это уравнение определяет функцию $w = W(x)$, называемую функцией Ламберта. Докажите асимптотическое разложение

$$W(x) = \log x - \log\log x + \frac{\log\log x}{\log x} + o\Big(\frac{\log\log x}{\log x}\Big).$$

6. Найдите первые три члена асимптотического разложения функций $y = y(x)$ на бесконечности $(x \to \infty)$. Функции заданы уравнениями

1. $y^2 + \log^2 y = x$;
2. $e^{xy} + x^2 + y = 1$.