# 1 группа. Материалы первого занятия.

## Замена переменной в дифференциальных уравнениях в частных производных

1. Преобразуйте уравнение, перейдя к новым переменным и новой функции:

$$\text{А) } x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{переменные} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \text{ функция та же;}$$
$$\text{Б) } x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad \text{переменные} \quad u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \text{ функция} \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

2. Докажите, что если функция $u$ — решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то функция $x' = x/t$, $t' = -1/t$, $u'(x,t) = \frac{u(x',t')}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ — тоже решение (в переменных $x, t$).

3. Найдите общий вид функции $z$, удовлетворяющей уравнению

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0,$$

где $B^2 - AC > 0$.

4. Запишите следующие уравнения в новых переменных $u$ и $v$:

   1. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, где $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ и $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;
   2. $z_{xx} + z_{yy} + m^2 z = 0$, где $x = e^u \cos v$ и $y = e^u \sin v$.