Математический анализ, листок 7.

выдан: 16 сентября, крайний срок сдачи: 15 октября

Упражнения

1. Докажите, что объединение любого семейства замкнутых отрезков прямой борелевски измеримо.

2. Бывает ли счётная (но бесконечная) сигма-алгебра?

3. Пусть n — натуральное число, а подмножества $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *вероятностного* пространства (X, μ) таковы, что $\sum_{j=1}^n P(E_j) > n - 1$. Докажите, что у множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ есть общая точка.

4. Какова мера подмножества отрезка, образованного числами, в десятичной записи которых есть число 0?

5. Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \tag{1}$$
на функцию z двух переменных. Пусть $\frac{\partial z}{\partial x} \neq 0$ в окрестности некоторой точки, это позволяет рассматривать x как функцию переменных y и z. Докажите, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению.

Рейтинговые задачи

6. **[1]** Пусть X — множество, $B \subset 2^X$ — некоторое множество его подмножеств. Докажите, что если множество B не более, чем континуально, то и минимальная порождённая им σ-алгебра — тоже.

7. **[1]** Всегда ли гомеоморфизм единичной окружности на себя переводит множества лебеговой меры нуль в множества лебеговой меры нуль?

8. **[1]** Характеристикой вписанного в единичную сферу тетраэдра назовём произведение его объёма на сумму квадратов расстояний от вершин до некоторой фиксированной точки P. Докажите, сумма характеристик всех тетраэдров некоторого разбиения вписанного в сферу многогранника не зависит от способа разбиения, а лишь от многогранника.

9. Пусть f — достаточно приличная функция на прямой. Определим её преобразование формулой
$$H[f](x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y}\, dy.$$

а) **[1]** Пусть f — характеристическая функция конечного объединения E отрезков на прямой. Докажите, что длина множества
$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, H[f](x) > t \right\}$$
зависит лишь от числа t и длины множества E, но не его геометрии.

б) **[3]** Справедливо ли аналогичное утверждение в случае, когда f — принимающая не более чем три значения (одно из которых нуль) простая функция? Правда ли, что ответ зависит лишь от длин множеств уровня функции f?

10. **[2]** Пусть $\mathbb{D}$ — замкнутый единичный диск на плоскости. Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots$ — замкнутые диски, попарно не пересекающиеся и лежащие строго внутри $\mathbb{D}$. Докажите, что если $\sum_{n=1}^\infty r(B_n) < +\infty$, то $\lambda_2\left(\mathbb{D} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) > 0$; здесь $r(B_n)$ — радиус диска B_n, а λ_2 — двумерная мера Лебега, то есть площадь.