1 группа. Материалы второго занятия.

Замена переменной в дифференциальных уравнениях в частных производных

Старые задачи

1. Докажите, что если функция u — решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то функция $x' = x/t$, $t' = -1/t$, $u'(x,t) = \frac{u(x',t')}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ — тоже решение (в переменных x, t).

2. Найдите общий вид функции z, удовлетворяющей уравнению

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0,$$

где $B^2 - AC > 0$.

3. Запишите следующие уравнения в новых переменных u и v:

   1. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, где $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ и $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

   2. $z_{xx} + z_{yy} + m^2 z = 0$, где $x = e^u \cos v$ и $y = e^u \sin v$.

Новые задачи

4. Каким дифференциальным уравнениям должны удовлетворять функции φ и ψ, чтобы уравнение Лапласа

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$$

переходило в себя при замене $x = \varphi(u,v)$ и $y = \psi(u,v)$?

5. Запишите уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ в сферических координатах $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\cos\varphi\sin\psi$ и $z = r\sin\varphi$.