

1 группа. Материалы третьего занятия.

Замена переменной в дифференциальных уравнениях в частных производных

Старые задачи

1. Запишите следующие уравнения в новых переменных u и v :

1. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, где $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ и $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

2. $z_{xx} + z_{yy} + m^2z = 0$, где $x = e^u \cos v$ и $y = e^u \sin v$.

2. Запишите уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ в сферических координатах $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \cos \varphi \sin \psi$ и $z = r \sin \varphi$.

Новые задачи

3. Вычислите следующие пределы:

1. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{\alpha+x^2(\alpha+\alpha^3)}$,

2. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta$,

3. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta$,

4. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-\sin R\theta} d\theta$,

5. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin R\theta} d\theta$.

4. Для целого числа n рассмотрим функцию Бесселя $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$. Докажите тождество

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$