Математический анализ. Листок 10

выдан: 24 февраля, крайний срок сдачи: 24 марта

Упражнения

1. Пусть P — многочлен степени n с корнями z_j. Докажите, что все корни многочлена P' лежат в выпуклой оболочке множества корней многочлена P. Докажите неравенство

$$|z - z_j| \geqslant \frac{1}{n} \min_{i \neq j}(|z_i - z_j|),$$

если z — корень многочлена P'.

2. Пусть ряд $\sum_{k \geqslant 0} f^{(k)}(0)$ сходится и функция f аналитична в окрестности нуля. Докажите, что её можно продолжить до целой функции, и ряд $\sum_{k \geqslant 0} f^{(k)}(z)$ сходится равномерно на любом компакте.

3. Пусть μ — конечная мера на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что уравнение

$$\int\limits_0^1 \cos(xt)\, d\mu(t) = 0 \tag{1}$$

имеет конечное число решений $x \in [-30, 533]$.

4. Докажите, что любое сепарабельное банахово пространство X изоморфно некоторому подпространству $Y \subset \ell_\infty$ (то есть, существует линейный непрерывный оператор $T\colon X \to Y$, обратный к которому непрерывен).

5. Пусть $a > 0, b > 0$, n – натуральное число. Вычислите

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B(k + a, n - k + b)}{k!(n - k)!},$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера.

Рейтинговые задачи

6. **[2 балла]** Пусть X — банахово пространство, Y — его подпространство, $T\colon Y \to L_\infty([0, 1])$ — линейный оператор. Докажите, что существует его продолжение на всё пространство X, то есть, такой оператор $\tilde{T}\colon X \to L_\infty([0, 1])$, что $\tilde{T}|_Y = T$.

7. **[1 балл]** Пусть функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитична вне единичного диска и всюду непрерывно дифференцируема. Докажите, что существует такая целая функция g, что разность $f - g$ равномерно ограничена на всей комплексной плоскости.

8. **[1 балл]** Существует ли такая непостоянная голоморфная в круге $|z| < 1$ функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, что $u^2 + 4v^2 = 1$ для всех $z = x + iy$ из круга $|z| < 1$.

9. **[2 балла]** Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с гладкой границей, $F\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция класса $C^2(\bar{\Omega})$. Пусть $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ — какая-то другая функция класса $C^2(\bar{\Omega})$ с теми же граничными значениями; то есть, $u(x) = F(x)$ при $x \in \partial\Omega$. Докажите неравенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\Delta u| + \int\limits_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|.$$

Здесь $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности $\partial\Omega$.

10. **[2 балла]** Пусть E — компакт в $\mathbb{C}$. Пусть функция f ограничена и непрерывна в области $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, а также аналитична в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$. Докажите, что

$$f(E) = f(\widehat{\mathbb{C}}).$$