1 группа. Материалы второго занятия.

Уравнения Коши–Римана

1. Пусть f комплексно дифференцируема в точке 0. Найдите её производную в направлении вектора $\omega \in \mathbb{C}$.
2. В каких точках плоскости комплексно дифференцируемы следующие функции:
   1) $\Re z$;
   2) $x^2 y^2$;
   3) $|z|^2$;
   4) $x^2 + iy^2$?
3. Докажите, что функция $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ аналитична в комплексной плоскости. Докажите формулы $\sinh z = -i \sin(iz)$ и $\cosh z = \cos(iz)$.
4. Где дифференцируема функция $\tan z$?
5. Пусть функция f комплексно дифференцируема и $f' = 0$ всюду. Докажите, что f постоянна.
6. Пусть f комплексно дифференцируема и а) $\Re f$ б) $|f|$ постоянна. Докажите, что f постоянна.
7. Найдите $\frac{\partial}{\partial z} F$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F$, если
   1) $F(z) = |z|$;
   2) $F(z) = |z - a|^p$, $p \in \mathbb{R}$;
8. Опишите множества $f(E)$ когда
   (a) $f(z) = z^2$, $E = \{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$;
   (b) $f(z) = e^z$, $E = \{z : \Re z > 1, -\pi/4 < \Im z < \pi/3\}$
   а что будет, если взять $E = \{z : \Re z > 1, -\pi < \Im z < 2\pi\}$?;
   (c) $f(z) = z + 1/z$, $E = \{z : |z| > 1\}$
   а что будет, если взять $E = \{z : |z| < 1\}$?

Гармонически сопряжённые функции

1. Найдите гармонически сопряженную к функции U функцию V, если:
   a) $U = xy$;
   b) $U = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x$;
   c) $U = r\varphi \cos\varphi + r \ln r \sin\varphi$.
2. Восстановите регулярную ветвь функции $f(z)$ по заданной функции:

a) $\Re(f) = e^x(x\cos y - y\sin y),\ f(0) = 0$;

b) $|f| = (x^2 + y^2)e^x$;

c) $\arg(f) = \varphi + r\sin\varphi$.

3. Найдите все гармонические функции, постоянные на каждой кривой следующего семейства:

a) $x = C$;

b) $y = Cx$;

c) $x^2 + y^2 = C$;

d) $x^2 + y^2 = Cx$.