1 группа. Материалы первого занятия.

Комплекснозначная функция вещественного аргумента

1. Какие кривые задаются следующими параметрическими уравнениями:

   1) $z(t) = t + it^2$, $t \in \mathbb{R}$;
   2) $z(t) = t + i/t$, $t > 0$;
   3) $z(t) = ae^{it} + 1/ae^{-it}$, $t \in (0, 2\pi)$;
   4) $z(t) = i\cos(t)$, $t \in (0, 2\pi)$?

2. Вычислите производную функций $(1 + i\sqrt{t})^n$; $(1 - it)e^{it}$.

3. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ — непрерывная, дифференцируемая комплекснозначная функция, $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Верно ли, что найдется $t \in (a, b)$, т.ч. $f'(t) = \lambda$? Докажите, что λ принадлежит выпуклой оболочке значений множества $\{f'(t)\colon t \in (a, b)\}$.

4. Вычислите интегралы $\int_0^1 \frac{dt}{1+it}$; $\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt$.

Уравнения Коши–Римана

1. Докажите, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в комплексном смысле тогда и только тогда, когда пара функций u и v удовлетворяет уравнениям Коши–Римана. Оператор комплексного дифференцирования обозначим $\frac{d}{dz}$.

2. Пусть $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Докажите, что уравнения Коши–Римана можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ или $\frac{\partial}{\partial z} \bar{f} = 0$.

3. Докажите, что уравнения Коши–Римана не зависят от поворота комплексной плоскости.

4. Докажите, что аналитические функции образуют алгебру над полем комплексных чисел.

5. Докажите, что класс аналитических функций замкнут относительно композиции.

6. Пусть f комплексно дифференцируема в точке 0. Найдите её производную в направлении вектора $\omega \in \mathbb{C}$.

7. В каких точках плоскости комплексно дифференцируемы следующие функции:

   1) $\Re z$;
   2) $x^2 y^2$;
   3) $|z|^2$;
   4) $x^2 + iy^2$?

8. Докажите, что функция $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ аналитична в комплексной плоскости. Докажите формулы $\sinh z = -i\sin(iz)$ и $\cosh z = \cos(iz)$.

9. Где дифференцируема функция $\tan z$?

10. Пусть функция f комплексно дифференцируема и $f' = 0$ всюду. Докажите, что f постоянна.

11. Пусть f комплексно дифференцируема и а) $\Re f$ б) $|f|$ постоянна. Докажите, что f постоянна.