Анализ на гладких многообразиях

Д. М. Столяров

14 февраля 2025 г.

Оглавление

Аннотация

Перед Вами конспект лекций по курсу «анализ на гладких многообразиях». Курс читается в седьмом семестре программы бакалавриата «Математика» факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета и является естественным продолжением стандартного курса математического анализа. Из-за нехватки времени из стандартного курса исключен раздел, посвященный дифференциальным формам. Цель курса — восполнить этот пробел. Основные темы — начала теории векторных расслоений, дифференциальные формы на многообразиях, когомологии де Рама и теория Ходжа. То, что курс проходит в седьмом семестре, накладывает определённые ограничения — курс неспешный, он не должен отвлекать студентов от написания дипломной работы. С другой стороны, изложение будет активно опираться на уже пройденные курсы гомологической алгебры, дифференциальной и римановой геометрии, уравнений в частных производных. Первая часть курса следует изложению классической книги [4]. Разделы про дифференциальные формы на многообразиях и когомологии де Рама почерпнуты, в основном, из книги [2]. Наконец, теория Ходжа взята, в основном, из [3].

Глава 1

Дифференциальные формы на евклидовом пространстве

1.1 Напоминание о мультилинейной алгебре

1.1.1 Тензорное произведение

5.9.2024

Пусть V, W, $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — конечномерные линейные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 1.1.1. *Отображение $T\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to W$ мультилинейно, если оно линейно по каждой координате. Множество всех таких отображений обозначим символом $L(V_1, V_2, \ldots, V_k; W)$.*

Пример 1.1.2. *1) Линейные отображение; в этом случае $k = 1$,*

2) скалярное произведение; в этом случае, $k = 2$ и $W = \mathbb{R}$,

3) произведение двух матриц фиксированного размера, $k = 2$,

4) векторное произведение в $\mathbb{R}^3$; в этом случае, $k = 2$ и $W = \mathbb{R}^3$,

5) определитель k векторов в $\mathbb{R}^k$; в этом случае $W = \mathbb{R}$.

Определим тензорное произведение, это можно сделать несколькими способами.

Определение 1.1.3. *Пусть $F \in L(V_1, V_2, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ и $G \in L(V_{k+1}, V_{k+2}, \ldots, V_{k+\ell}; \mathbb{R})$. Тензорным произведением $F \otimes G$ отображений F и G называют отображение класса $L(V_1, V_2, \ldots, V_{k+\ell}; \mathbb{R})$, действующее по правилу*

$$F \otimes G(v_1, v_2, \ldots, v_{k+\ell}) = F(v_1, v_2, \ldots, v_k)G(v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+\ell}), \qquad \forall i \in [1 \mathinner{..} k+\ell]\ v_i \in V_i. \quad (1.1.1)$$

Замечание 1.1.4. *Тензорное произведение ассоциативно, но не коммутативно, как показано в следующем примере.*

Пример 1.1.5. *Пусть $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, то есть, линейное пространство с выбранным базисом и скалярным произведением, а $F = dx^1$, $G = dx^2$. Символом dx^j обозначен линейный функционал, значение которого равно единице на j-м базисном векторе и нулю на всех остальных. Тогда*

$$dx^1 \otimes dx^2(u, v) = u_1 v_2, \quad \text{а} \quad dx^2 \otimes dx^1(u, v) = u_2 v_1. \qquad (1.1.2)$$

Можно определять тензорное произведение по-другому. Пусть V и W — как и раньше, конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{R}$. Снабдим множество $V \times W$ структурой свободного векторного пространства и рассмотрим его фактор по линейному пространству, порождённому всевозможными элементами вида

$$\begin{gathered} av \times w - a(v \times w); \quad v \times (aw) - a(v \times w); \qquad a \in \mathbb{R}, v \in V, w \in W, \\ (v_1 + v_2) \times w - v_1 \times w - v_2 \times w; \quad v \times (w_1 + w_2) - v \times w_1 - v \times w_2, \quad v_1, v_2, v \in V, \ w_1, w_2, w \in W. \end{gathered} \tag{1.1.3}$$

Это фактор-простанство и есть $V \otimes W$; соответствующее фактор-отображение $V \times W \to V \otimes W$ обозначим символом π.

Предложение 1.1.6. *Построенное тензорное произведение, снабжённое отображением $\pi\colon V \times W \to V \otimes W$, обладает следующим свойством универсальности. Для всякого билинейного отображения $T\colon V \times W \to U$, где U — некоторое конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, существует единственное такое линейное отображение $\tilde{T}\colon V \otimes W \to U$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1.4}$$

коммутативна.

Замечание 1.1.7. *Построенное тензорное произведение ассоциативно.*

Предложение 1.1.8. *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — базис пространства V, а $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — базис пространства W. Набор*

$$\{v_i \otimes w_j \mid i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m\} \ - \tag{1.1.5}$$

базис пространства $V \otimes W$.

Следствие 1.1.9. *Справедлива формула*

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W. \tag{1.1.6}$$

Если V — конечномерное линейное пространство, то символ V^* обозначает пространство линейных функционалов на V.

Предложение 1.1.10. *Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — конечномерные пространства. Отображение $\Phi\colon V_1^* \times V_2^* \times \ldots \times V_k^* \to L(V_1, V_2, \ldots, V_k; \mathbb{R})$, заданное формулой*

$$\Phi(v^1, v^2, \ldots, v^k)[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \prod_{j=1}^{k} v^j[v_j], \quad \forall j \in [1 \,..\, k] \quad v_j \in V_j, v^j \in V_j^*, \tag{1.1.7}$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств $\bigotimes_{j=1}^k V_j^*$ и $L(V_1, V_2, \ldots, V_k; \mathbb{R})$.

Следствие 1.1.11. *Пространство $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ имеет размерность d^k. Базис в этом пространстве задан, например, тензорами вида*

$$dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}, \quad \text{где} \ \ \forall j \quad i_j \in [1 \,..\, d]. \tag{1.1.8}$$

Элементы пространства $V^{\otimes k}$ называют контрвариантными тензорами ранга k, а элементы пространства $(V^*)^{\otimes k}$ — ковариантными тензорами ранга k. Предложение 1.1.10, в частности, позволяет думать о ковариантных тензорах ранга k как о k-линейных функционалах на пространстве V.

1.1.2 Симметричные и антисимметричные тензоры

Пусть α — ковариантный тензор ранга k на пространстве V, а $\sigma \in S^k$ — перестановка множества $[1 \,..\, k]$. Определим тензор $\sigma(\alpha)$ по формуле

$$\sigma(\alpha)[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \alpha[v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}], \tag{1.1.9}$$

для всякого набора векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

Определение 1.1.12. *Тензор $\alpha \in (V^*)^{\otimes k}$ назовём симметричным, если для всякой перестановки $\sigma \in S^k$ справедливо равенство $\sigma(\alpha) = \alpha$. Пространство симметричных ковариантных тензоров ранга k обозначим символом $\Sigma^k(V^*)$. Симметризацией тензора α назовём тензор*

$$\operatorname{Sym} \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} \sigma(\alpha). \tag{1.1.10}$$

Напомним, что $\# S^k = k!$.

Предложение 1.1.13. *Оператор* Sym *— проекция пространства $(V^*)^{\otimes k}$ на $\Sigma^k(V^*)$.*

Предложение 1.1.14. *Базис в пространстве $\Sigma^k(V^*)$ можно задать так: пусть $v^1, v^2, \ldots, v^n$ — базис в пространстве V^*; тогда*

$$\left\{ \operatorname{Sym} \left[(v^1)^{\otimes i_1} \otimes (v^2)^{\otimes i_2} \otimes \ldots \otimes (v^n)^{\otimes i_n} \right] \,\middle|\, i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k \right\} - \tag{1.1.11}$$

базис в пространстве $\Sigma^k(V)$.

Следствие 1.1.15. *Справедливо соотношение*

$$\dim \Sigma^k(V^*) = C^k_{n+k-1}, \quad n = \dim V. \tag{1.1.12}$$

Примером симметричного тензора может служить скалярное произведение. Введём теперь антисимметричные тензоры. Напомним, что знак $\operatorname{sign}\sigma$ перестановки $\sigma \in S^k$ — чётность числа транспозиций в перестановке σ.

Определение 1.1.16. *Тензор $\alpha \in (V^*)^{\otimes k}$ назовём антисимметричным, если для всякой перестановки $\sigma \in S^k$ справедливо равенство $\sigma(\alpha) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha$. Пространство антисимметричных ковариантных тензоров ранга k обозначим символом $\Lambda^k(V^*)$. Антисимметризацией или альтернированием тензора α назовём тензор*

$$\operatorname{Alt} \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}\sigma \cdot \sigma(\alpha). \tag{1.1.13}$$

Предложение 1.1.17. *Оператор* Alt *— проекция пространства $(V^*)^{\otimes k}$ на $\Lambda^k(V^*)$.*

Предложение 1.1.18. *Следующие утверждения о тензоре $\alpha \in (V^*)^{\otimes k}$ равносильны:*

1) $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$;

2) $\alpha[v_1, v_2, \ldots, v_k] = 0$ *для всякого набора линейно зависимых векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_k$;

3) $\alpha[v_1, v_2, \ldots, v_k] = 0$ *для всякого набора* $v_1, v_2, \ldots, v_k$, *в котором встречаются два одинаковых вектора.*

Предложение 1.1.19. *Пусть $v^1, v^2, \ldots, v^n$ — базис в пространстве V^*. Тогда множество*

$$\left\{ \mathrm{Alt}\left[v^{i_1} \otimes v^{i_2} \otimes \ldots \otimes v^{i_k}\right] \,\middle|\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n \right\} - \tag{1.1.14}$$

базис пространства $\Lambda^k(V^*)$.

Элементы пространства $\Lambda^k(V^*)$ также называют k-формами.

Следствие 1.1.20. *Пусть $\dim V = n$. Если $k > n$, то $\Lambda^k(V^*) = \{0\}$. Пространство $\Lambda^n(V^*)$ одномерно и любая n-форма пропорциональна n-линейной функции «определитель». В общем случае справедлива формула $\dim \Lambda^k(V^*) = C_n^k$.*

1.1.3 Внешнее произведение

Определение 1.1.21. *Пусть $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ и $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$. Определим внешнее произведение этих форм $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$ согласно формуле*

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta). \tag{1.1.15}$$

Замечание 1.1.22. *Некоторые авторы не умножают альтернирование в формуле* (1.1.15) *на* $\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}$. *Удобство введения этого множителя выражено, например, следующим вычислением. Пусть $V = \mathbb{R}^d$, а α и β — элементарные формы, то есть, $\alpha = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $\beta = dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}$. Тогда*

$$\alpha \wedge \beta = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}. \tag{1.1.16}$$

Замечание 1.1.23. *Внешнее произведение билинейно, ассоциативно и антикоммутативно*:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*). \tag{1.1.17}$$

Предложение 1.1.24. *Пусть $v^1, v^2, \ldots, v^n \in V^*$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Тогда*

$$v^1 \wedge v^2 \wedge \ldots \wedge v^n[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \det\left(v^i[v_j]\right)_{i,j}. \tag{1.1.18}$$

Следствие 1.1.25. *Любое k-линейное антисимметричное отображение T евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$ может быть представлено в виде*

$$T[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathfrak{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \det\left(dx^{i_j}[v_i]\right)_{i,j=1,2,\ldots,k}, \qquad v_i \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1.19}$$

где символом $(w)_s$ обозначена s-я координата вектора $w \in V$, а $\mathfrak{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ — произвольные коэффициенты.

Упражнение 1.1.26. *Пусть ω — ненулевая форма первой степени. Тогда $\alpha = w \wedge \beta$ тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \alpha = 0$.*

1.1.4 Звёздочка Ходжа

12.9.2024

Определим линейное отображение «звёздочка Ходжа» $\star\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^d) \to \Lambda^{d-k}(\mathbb{R}^d)$ на базисных векторах. Пусть $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant d$, а $\bar{I} = (\bar{i}_1, \bar{i}_2 \ldots, \bar{i}_{d-k})$ — мультииндекс длины $d - k$, упорядоченный по возрастанию и дополняющий I в $[1\,..\,d]$. Положим

$$\star(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot dx^{\bar{i}_1} \wedge dx^{\bar{i}_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\bar{i}_{d-k}}, \tag{1.1.20}$$

где σ — перестановка, получающаяся последовательной записью I и $\bar{I}$.

Пример 1.1.27. *Пусть $d = 3$ и $k = 1$. Тогда*

$$\star dx = dy \wedge dz; \quad \star dy = -dx \wedge dz = dz \wedge dx; \quad \star dz = dx \wedge dy. \tag{1.1.21}$$

Замечание 1.1.28. *Справедливо тождество $\star\star\,\eta = (-1)^{k(d-k)}\eta$, где $\eta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.*

Звёздочку Ходжа можно определить и более абстрактно, в «бескоординатной» форме. Для этого надо рассмотреть векторное пространство V размерности d, снабжённое скалярным произведением и ориентацией. Это позволяет задать скалярное произведение разложимых тензоров

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \det\Big(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\Big)_{i,j}, \qquad \alpha = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^k, \qquad \beta = \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \ldots \wedge \beta^k, \tag{1.1.22}$$

и распространить его по линейности на всё пространство $\Lambda^k(V^*)$.

Предложение 1.1.29. *Звёзочка Ходжа — единственный такой линейный оператор из $\Lambda^k(V^*)$ в $\Lambda^{d-k}(V^*)$, что*

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \det, \tag{1.1.23}$$

где $\det$ *— определитель в каком-либо положительном ортонормированном базисе.*

Полезно следующее геометрическое представление о звёздочке Ходжа: если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ — разложимая k-форма (то есть, все α_j — формы ранга 1), то $\star\alpha$ пропорциональна форме $\beta_1 \wedge \beta_2 \ldots \wedge \beta_{d-k}$ — где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{d-k}$ — какой либо базис в ортогональном дополнении линейной оболочки векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

1.2 Дифференциальные формы на евклидовом пространстве

1.2.1 Определение, внешнее умножение, пересадка отображениями

Определение 1.2.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — область, то есть, связное открытое множество. Гладкое отображение области U в конечномерное линейное пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ назовём дифференциальной формой ранга k или просто k-формой. Пространство k-форм на области U обозначим символом $\Omega^k(U)$.*

Замечание 1.2.2. *Предложение* 1.1.19 *о базисе в пространстве $\Lambda^k(U)$ позволяет записать любую форму $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^d)$ в виде*

$$\alpha(x) = \sum_I a_I(x) dx^I, \qquad dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \tag{1.2.1}$$

где суммирование ведётся по всем индексам $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant d$, а $a_I \colon U \to \mathbb{R}$ — гладкая[1] *функция.*

Значение формы α в точке $x \in U$ иногда будем обозначать символом $\alpha(x)$, а иногда — $\alpha|_x$. Позже (см. параграф 2.2) мы поймём, что думать о формах как функциях не совсем правильно.

Пример 1.2.3. *Пусть $f \colon U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Её дифференциал можно интерпретировать как 1-форму $df \in \Omega^1(U)$:*

$$df(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx^j, \qquad x \in U. \tag{1.2.2}$$

[1] Под гладкой функцией мы всегда понимаем бесконечно дифференцируемую.

Дифференциальные формы порядка k можно умножать: если $\alpha \in \Omega^k(U)$ и $\beta \in \Omega^\ell(U)$, то форма $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ задана как поточечное произведение:

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x), \qquad x \in U. \tag{1.2.3}$$

Определение 1.2.4. *Пусть $U_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ — области, $F\colon U_1 \to U_2$ — гладкое отображение. Пересадкой k-формы $\alpha \in \Omega^k(U_2)$ назовём k-форму $F^*\alpha \in \Omega^k(U_1)$, заданную (поточечно) формулой*

$$F^*\alpha|_x[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \alpha|_{F(x)}[dF|_x v_1, dF|_x v_2, \ldots, dF|_x v_k], \tag{1.2.4}$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — произвольные векторы пространства $\mathbb{R}^d$, dF — дифференциал отображения F.

Формулу, определяющую пересадку, можно выразить следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
(T_{F(x)}U_2)^{\otimes k} \arrow[r, "\alpha|_{F(x)}"] & \mathbb{R} \\
(T_xU_1)^{\otimes k} \arrow[u, "dF|_x"] \arrow[ur, dotted, "F^*\alpha|_x"'] &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.5}$$

Символ T_xM обозначает касательное пространство к многообразию M в точке x. В нашем случае, конечно же, это просто евклидовы пространства. На тензорной степени пространства дифференциал действует покоординатно согласно формуле (1.2.4).

Предложение 1.2.5. *Операция пересадки — линейный оператор. Кроме того,* $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$.

Доказательство. Линейность просто следует из определения. Проверим второе свойство. Пусть $\alpha \in \Omega^k(U_2)$, $\beta \in \Omega^\ell(U_2)$ и $x \in U_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
F^*(\alpha \wedge \beta)|_x[v_1, v_2, \ldots, v_{k+\ell}] &= (\alpha \wedge \beta)|_{F(x)}\Big[dF|_x v_1, dF|_x v_2, \ldots, dF|_x v_{k+\ell}\Big] \\
&= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \operatorname{Alt}\big(\alpha \otimes \beta|_{F(x)}\big)\big[dF|_x v_1, dF|_x v_2, \ldots, dF|_x v_{k+\ell}\big]
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

для произвольных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_{k+\ell} \in \mathbb{R}^{d_1}$.

Пользуясь определением альтернирования, последнее выражение можно преобразовать в

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha|_{F(x)}\Big[dF|_x v_{\sigma(1)}, dF|_x v_{\sigma(2)}, \ldots, dF|_x v_{\sigma(k)}\Big] \times \\
\beta|_{F(x)}\Big[dF|_x v_{\sigma(k+1)}, dF|_x v_{\sigma(k+2)}, \ldots, dF|_x v_{\sigma(k+\ell)}\Big],
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

что и равно $(F^*\alpha \wedge F^*\beta)|_x[v_1, v_2, \ldots, v_{k+\ell}]$, опять же, по определению внешнего произведения. □

Пересадки форм удобно считать в стандартных базисах. Пусть дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(U_2)$ имеет вид $\sum_I a_I dy^I$. Пусть $F\colon U_1 \to U_2$ — пересаживающее отображение; обозначим символом F_i его i-ю координату. То есть,

$$F(x) = \big(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{d_2}(x)\big), \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, d_2 \qquad F_i\colon U_1 \to \mathbb{R}. \tag{1.2.8}$$

Иными словами, $F_i = dy^i \circ F$. В таком случае, из формулы (1.2.4) получаем

$$F^*\alpha(x) = \sum_I a_I(F(x)) dF^I(x), \qquad dF^I = \bigwedge_{i \in I} dF_i. \tag{1.2.9}$$

В последней формуле мы использовали 1-формы, естественным образом связанные с дифференциалами функций F_i (см. пример 1.2.3). Покажем примеры применения этих формул.

Пример 1.2.6. *Рассмотрим полярную замену $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. В таком случае,*

$$\begin{cases} dx = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi; \\ dy = d(r\sin\varphi) = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Например, форма объёма $dx \wedge dy$ «пересадится» в форму

$$\begin{aligned} dx \wedge dy = (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi) \wedge (\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) \\ = r\cos^2\varphi\, dr \wedge d\varphi - r\sin^2\varphi\, d\varphi \wedge dr = r\, dr \wedge d\varphi. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Упражнение 1.2.7. *Пересадите трёхмерную форму объёма $dx \wedge dy \wedge dz$ сферической заменой координат, то есть, отображением*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi; \\ y = r\cos\varphi\sin\psi; \\ z = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.2.12}$$

Иногда отображение F задано неявно, но при вычислении пересадки форм неявная функция уходит из ответа. Рассмотрим полярную замену из предыдущего примера. Будем считать, что r и φ неудобно[2] выражать через x и y. В этом случае, мы можем решить систему линейных уравнений (1.2.10) и выразить дифференциалы r и φ как функций переменных x и y

$$\begin{cases} dr = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy; \\ r d\varphi = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Например, теперь можно без труда вычислить пересадку формы площади $dr \wedge d\varphi$ в координатах (r, φ):

$$dr \wedge d\varphi = \big(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy\big) \wedge \Big(\frac{\cos\varphi}{r}\, dy - \frac{\sin\varphi}{r}\, dx\Big) = \frac{1}{r}\, dx \wedge dy = \frac{dx \wedge dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.2.14}$$

Пример 1.2.8. *Рассмотрим стандартное вложение $i\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, $d_1 < d_2$. Пусть I — мультииндекс порядка k на $\mathbb{R}^{d_2}$. Вычислим пересадку базисной формы dy^I отображением i:*

$$i^* dy^I = \begin{cases} dx^I, & \text{индекс } I \text{ содержит лишь числа промежутка } [1 \mathinner{..} d_1]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.2.15}$$

1.2.2 Внешний дифференциал

Определение 1.2.9. *Пусть $\alpha \in \Omega^k(U_1)$, где $U_1 \subset \mathbb{R}^d$. Определим внешний дифференциал базисной формы α по правилу*

$$d\alpha = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^I, \qquad \text{если} \quad \alpha = \sum_I \alpha_I dx^I, \tag{1.2.16}$$

и распространим это определение на все k-формы по линейности.

Отметим, что это определение согласовано с нашим определением 1-формы df, $f \in C^\infty(U)$: эта форма действительно является дифференциалом 0-формы f в смысле приведённого определения.

[2] И действительно, чтобы выразить φ, нужна какая-нибудь обратная тригонометрическая функция.

Предложение 1.2.10. *Оператор* $d\colon \Omega^k(U_1) \to \Omega^k(U_2)$ *обладает следующими свойствами*:

1) это линейный оператор;

2) справедлива формула дифференцирования произведения:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta; \tag{1.2.17}$$

3) $d \circ d = 0$;

4) если $F\colon U_1 \to U_2$ *— гладкое отображение, то*

$$dF^*\alpha = F^* d\alpha. \tag{1.2.18}$$

Доказательство. **Первое свойство** не нуждается в проверке.

Второе свойство достаточно проверить на базисных формах $\alpha = a_I\, dx^I$ и $\beta = b_J\, dx^J$. В таком случае,

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) = d\big(\alpha \wedge \beta\big) = d(a_I b_J\, dx^I \wedge dx^J) = b_J\, da_I \wedge dx^I \wedge dx^J + a_I\, db_J \wedge dx^I \wedge dx^J \\ = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k a_I\, dx^I \wedge db_J \wedge dx^j, \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

потому что форма db_j — первого порядка. Получаем правую часть формулы (1.2.17).

Третье свойство тоже можно проверять лишь на базисных формах:

$$\begin{aligned} d[da_I\, dx^I] = d\Big[\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^I\Big] = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \\ = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant d} \Big(\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j}\Big) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I = 0. \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Четвёртое свойство тоже будем доказывать лишь для случая $\alpha = a_I\, dx^I$. Распишем:

$$F^*\alpha|_x = a_I(F(x)) d(F(x))^I = a_I(F(x)) \bigwedge_{i \in I} dF_i(x), \qquad x \in U_1. \tag{1.2.21}$$

Продифференцируем это равенство (активно пользуясь уже доказанным третьим свойством внешнего дифференциала):

$$dF^*\alpha|_x = \sum_{k=1}^{d_2}\sum_{j=1}^{d_1} \frac{\partial a_I}{\partial y_k}\Big|_{F(x)} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}\Big|_x dx^j \wedge \bigwedge_{i \in I} dF_i\Big|_x = \sum_{k=1}^{d_2} \frac{\partial a_I}{\partial y_k}\Big|_{F(x)} dF_k\Big|_x \wedge \bigwedge_{i \in I} dF_i\Big|_x = F^*\, d\alpha. \tag{1.2.22}$$

□

Замечание 1.2.11. *Существует единственное отображение* $d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^d) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ *(для всех* k*), удовлетворяющее первым трём свойствам предложения* 1.2.10, *и совпадающее с дифференциалом на* 1*-формах.*

1.2.3 Замкнутые и точные формы

19.9.2024

Определение 1.2.12. *Форма $\omega \in \Omega^k(U)$ называется замкнутой, если $d\omega = 0$ и точной, если $\omega = d\eta$ для некоторой формы $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$, $k \geqslant 1$.*

Замечание 1.2.13. *Точная форма замкнута по третьему пункту предложения* 1.2.10.

Теорема 1.2.1 (Теорема Пуанкаре)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — такая[3] область, что $tU \subset U$ для всякого числа $t \in [0,1]$. Любая замкнутая в U форма точна.*

Доказательство. Пусть $V = U \times [0,1]$. Координаты в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ будем обозначать символами $x_1, x_2, \dots, x_d, t$. Рассмотрим оператор π_*, переводящий пространство $\Omega^{k+1}(V)$ в $\Omega^k(U)$ и заданный на базисных формах по правилу

$$\pi_*[a_I dx^I] = 0, \qquad \pi_*[a_I dt \wedge dx^I] = \Big(\int\limits_0^1 a_I(s,x)\, ds\Big)\, dx^I. \tag{1.2.23}$$

Рассмотрим также два вложения $\mathrm{Z}, \mathrm{O} \colon U \to V$,

$$\mathrm{Z}(x) = (x, 0), \qquad \mathrm{O}(x) = (x,1), \qquad x \in U. \tag{1.2.24}$$

Также будем рассматривать операторы пересадки $\mathrm{Z}^*, \mathrm{O}^* \colon \Omega^{k+1}(V) \to \Omega^{k+1}(U)$. **Докажем** следующую замечательную формулу:

$$\pi_*[d\alpha] = \mathrm{O}^*[\alpha] - \mathrm{Z}^*[\alpha] - d\pi_*[\alpha], \qquad \alpha \in \Omega^k(V). \tag{1.2.25}$$

Достаточно проверить справедливость формулы на базисных формах.

В случае $\alpha = a_I dt \wedge dx^I$ действия операторов пересадки в правой части равенства зануляются ввиду формулы (1.2.15) и проверка равенства сводится к перестановке дифференцирования и интегрирования.

В случае $\alpha = a_I\, dx^I$ левая часть равна $(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial t}(s,x)\, ds)\, dx^I$, а правая — $a_I(1,x)\, dx^I - a_I(0,x)\, dx^I$, и тождество сводится к формуле Ньютона–Лейбница. Таким образом, формула (1.2.25) **доказана**.

Теперь рассмотрим отображение $h \colon V \to U$, заданное по правилу $h(t,x) = tx$; его образ лежит в области U благодаря звёздности области U. Положим $J = \pi_* \circ h^*$. Тогда

$$\pi_*[dh^*\omega] \overset{(1.2.25)}{=} \mathrm{O}[h^*[\omega]] - \mathrm{Z}^*[h^*[\omega]] - dJ\omega. \tag{1.2.26}$$

Если $d\omega = 0$, то левая часть равна нулю по четвёртому пункту предложения 1.2.10. Так как $\mathrm{Z}^* \circ h^* = 0$ и $\mathrm{O}^* \circ h^* = \mathrm{id}\,|_U$, получаем $\omega = dJ\omega$. ☐

Замечание 1.2.14. *Любые такие две формы η_1 и η_2, что $d\eta_1 = d\eta_2$, отличаются на замкнутую форму, поэтому решения уравнения $d\eta = \omega$, получаются из $\eta = J\omega$ прибавлением замкнутой формы.*

Покажем, что условие звёздности области U существенно.

Пример 1.2.15. *Пусть $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$. Эта форма замкнута, но не точна. Замкнутость проверяется прямым вычислением. Покажем неточность рассматриваемой формы. Предположим противное, пусть $\omega = df$ для некоторой функции $f \in C^\infty(U)$. В таком случае,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{1.2.27}$$

[3]Такие области называют звёздными.

Воспользуемся формулой
$$f(b) - f(a) = \int\limits_0^1 \langle df|_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle\, dt, \tag{1.2.28}$$
где $\gamma\colon [0,1] \to U$ *— соединяющая точки* a *и* b *кривая. Рассмотрим вполне конкретную кривую* $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. *В таком случае, в левой части формулы* (1.2.28) *стоит ноль, а в правой*
$$\int\limits_0^1 \big(\sin 2\pi t(-2\pi \sin 2\pi t) - \cos 2\pi t(2\pi \cos 2\pi t)\big)\, dt = -2\pi. \tag{1.2.29}$$
Противоречие.

1.2.4 Классические операторы векторного анализа

Оказывается, классические операторы векторного анализа можно выразить через внешний дифференциал. Пусть $d = 3$. Если f — гладкая функция, то
$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big) - \tag{1.2.30}$$
её градиент. Если $F = (F_1, F_2, F_3)$ — гладкое векторное поле, то
$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} - \tag{1.2.31}$$
его дивергенция. Наконец, ротор[4] векторного поля $F = (F_1, F_2, F_3)$ определён формулой
$$\operatorname{rot} F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big). \tag{1.2.32}$$
Градиент уже был описан как дифференциал 0-форм в примере 1.2.3. Нужно отождествить функцию f с 0-формой, а векторное поле F с 1-формой
$$\mathrm{I}\, F = F_1\, dx^1 + F_2\, dx^2 + F_3\, dx^3, \qquad \mathrm{I}\colon C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3). \tag{1.2.33}$$
Получим коммутативную диаграмму
$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\ \nabla\ } & C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \\ \Big\| & & \Big\updownarrow \mathrm{I} \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\ d\ } & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \end{array} . \tag{1.2.34}$$

Применим теперь внешний дифференциал к форме $\mathrm{I}\, F$:
$$d\Big(F_1\, dx^1 + F_2\, dx^2 + F_3\, dx^3\Big) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\Big)\, dx^3 \wedge dx^1 + \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)\, dx^2 \wedge dx^3. \tag{1.2.35}$$
Это очень похоже на ротор! Рассмотрим оператор $\star\mathrm{I}\colon C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, действующий по правилу
$$\star\mathrm{I}(F_1, F_2, F_3) = F_1\, dx^1 \wedge dx^2 + F_2\, dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2. \tag{1.2.36}$$

[4] В англоязычной литературе более распространено обозначение $\operatorname{curl} F$.

Получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{I}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[d, leftrightarrow, "\star\,\mathrm{I}"] \\ \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \end{tikzcd} \qquad . \tag{1.2.37}$$

Символ $\star$ здесь появился не случайно, а в соответствии с формулами (1.1.21).

Наконец, продифференцировав форму $F_3\,dx^1 \wedge dx^2 - F_2\,dx^3 \wedge dx^1 + F_1\,dx^1 \wedge dx^2$, получим форму $(\operatorname{div} F)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Объединим все эти тождества в уже весьма внушительную диаграмму

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, equal] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{I}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, leftrightarrow, "*\,\mathrm{I}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[d, equal] \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{tikzcd} \qquad . \tag{1.2.38}$$

В частности, отсюда и из третьего пункта предложения 1.2.10 следуют формулы

$$\operatorname{rot} \circ \nabla = 0, \qquad \operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0. \tag{1.2.39}$$

Замечание 1.2.16. *Операторы* ∇, rot *и* div *инвариантны относительно замены координат.*

1.2.5 Кодифференциал и лапласиан

Определение 1.2.17. *Пусть* $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^d)$ *— дифференциальная форма с компактным носителем, то есть,* $\omega|_x = a(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^d$ *и функция* a *имеет компактный носитель. Определим интеграл* $\int_{\mathbb{R}^d} \omega$ *как просто* $\int_{\mathbb{R}^d} a(x)\,dx$.

Лемма 1.2.18. *Пусть* $\omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ *— дифференциальная форма с компактным носителем. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\omega = 0. \tag{1.2.40}$$

Доказательство основывается на формуле Ньютона–Лейбница и остаётся читателю в качестве упражнения. Приведённое ниже следствие получается из леммы при помощи формулы (1.2.17).

Следствие 1.2.19. *Если* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^d)$ *и* $\eta \in \Omega^{d-k-1}(\mathbb{R}^d)$ *— формы с компактным носителем, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\omega \wedge \eta = (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega \wedge d\eta. \tag{1.2.41}$$

Определение 1.2.20. *Пусть* $\alpha, \beta \in \Omega^k(U)$ *— две формы с компактным носителем. Определим их скалярное произведение в пространстве* $L_2\Omega^k(U)$ *по формуле*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int\limits_U \langle \alpha|_x, \beta|_x \rangle\,dx. \tag{1.2.42}$$

Формула нуждается в пояснении. Скалярное произведение под знаком интеграла — определённое формулой (1.1.22) *скалярное произведение внешних форм.*

Определение 1.2.21. *Оператор* $\partial = (-1)^{d(k+1)+1} \star d \star \colon \Omega^k \to \Omega^{k-1}$ *назовём кодифференциалом.*

Предложение 1.2.22. *Оператор ∂ формально сопряжён оператору d в том смысле, что для всяких форм $\omega \in \Omega^k(U)$ и $\eta \in \Omega^{k+1}(U)$ с компактным носителем*[5] *справедливо равенство*

$$\langle d\omega, \eta\rangle = \langle \omega, \partial\eta\rangle. \tag{1.2.43}$$

Доказательство. Воспользуемся определением:

$$\begin{aligned}\langle d\omega, \eta\rangle &\overset{\text{пр. 1.1.29}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\omega \wedge \star\eta \overset{\text{сл. 1.2.19}}{=} (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega \wedge d[\star\eta] \\ &\overset{\text{зам. 1.1.28}}{=} (-1)^{k+1+(d-k)k} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega \wedge (\star\star d[\star\eta]) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega \wedge \star\partial\eta = \langle \omega, \partial\eta\rangle.\end{aligned} \tag{1.2.44}$$

Отметим, что форма η имеет степень $(k+1)$, поэтому при проверке предпоследнего равенства мы воспользовались тождеством

$$k + 1 + (d-k)k \equiv_2 d(k+2) + 1. \tag{1.2.45}$$

□

Следствие 1.2.23. *Справедливо тождество $\partial \circ \partial = 0$.*

Определение 1.2.24. *Оператор $\partial d + d\partial \colon \Omega^k \to \Omega^k$ называют оператором Ходжа–Лапласа и обозначают символом Δ_{H}.*

Теорема 1.2.2. *Это действительно оператор Лапласа в том смысле, что*

$$\Delta_{\mathrm{H}}[a_I dx^I] = (-\Delta a_I) dx^I. \tag{1.2.46}$$

26.9.2024

Доказательство. Пусть $\#I = k$. Начнём с вычисления дифференциала $w = a_I dx^I$:

$$dw = \sum_{j\notin I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^j \wedge dx^I = \sum_{j\notin I} (-1)^{\epsilon(\{j\},I)} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{\{j\}\cup I}. \tag{1.2.47}$$

Символом $\epsilon(K,L)$, где K и L — не пересекающиеся множества индексов, обозначим чётность перестановки, необходимой для упорядочивания по возрастанию последовательности индексов (K,L); кроме того, напомним читателю обозначения (1.2.1):

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \tag{1.2.48}$$

где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant d$.

Кодифференциал вычислить сложнее:

$$\begin{aligned}\partial w &= (-1)^{d(k+1)+1} \star d \star w = (-1)^{d(k+1)+1+\epsilon(I,\bar I)} \star d\Big[a_I dx^{\bar I}\Big] \\ &= (-1)^{d(k+1)+1+\epsilon(I,\bar I)} \star \sum_{j\in I} (-1)^{\epsilon(\{j\},\bar I)} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{\bar I\cup\{j\}} \\ &= (-1)^{d(k+1)+1+\epsilon(I,\bar I)} \sum_{j\in I} (-1)^{\epsilon(\{j\},\bar I)+\epsilon(\bar I\cup\{j\}, I\setminus\{j\})} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx^{I\setminus\{j\}}.\end{aligned} \tag{1.2.49}$$

[5] Достаточно требовать компактность носителя лишь одной из двух форм.

Мы не будем доказывать равенство (1.2.46) напрямую, а докажем совпадение билинейных форм, порождённых нашими операторами. Пока что вычислим действие соответствующих квадратичных форм на базисных формах:

$$\langle(\partial d+d\partial)w,w\rangle=\langle dw,dw\rangle+\langle\partial w,\partial w\rangle\overset{\substack{(1.2.47)\\(1.2.49)}}{=}\sum_{j\notin I}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial a_I}{\partial x_j}\Big|^2+\sum_{j\in I}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial a_I}{\partial x_j}\Big|^2, \tag{1.2.50}$$

что совпадает с квадратичной формой, порождённой минус лапласианом. Однако совпадение квадратичных форм не влечёт совпадение операторов. Нужно доказать совпадение билинейных форм. Оно последует из тождества $\langle(\partial d+d\partial)w_1,w_2\rangle=0$, где w_1 и w_2 — две базисные формы, соответствующие различным индексам I_1 и I_2. Это тождество можно переписать в виде

$$\langle dw_1,dw_2\rangle+\langle\partial w_1,\partial w_2\rangle=0. \tag{1.2.51}$$

Из формул (1.2.47) и (1.2.49) видно, что указанное выражение может быть неравно нулю лишь если $\#(I_1\cap I_2)=k-1$. В противном случае базисные формы, участвующие в выражениях для дифференциалов и кодифференциалов форм w_1 и w_2, различны, и их скалярное произведение равно нулю. Рассмотрим теперь случай $\#(I_1\cap I_2)=k-1$. Пусть $I=I_1\cap I_2$ и $I_1=\{i_1\}\cup I$, $I_2=\{i_2\}\cup I$. В таком случае,

$$\langle dw_1,dw_2\rangle=(-1)^{\epsilon(\{i_1\},I_2)+\epsilon(\{i_2\},I_1)}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_{i_1}}\cdot\frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_{i_2}}. \tag{1.2.52}$$

Как обычно, формула для кодифференциала имеет слегка более сложный вид:

$$\langle\partial w_1,\partial w_2\rangle=(-1)^{\epsilon(I_1,\bar I_1)+\epsilon(I_2,\bar I_2)+\epsilon(\{i_1\},\bar I_1)+\epsilon(\{i_2\},\bar I_2)}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_{i_1}}\cdot\frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_{i_2}}. \tag{1.2.53}$$

Двукратное интегрирование по частям подтверждает справедливость формулы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_2}-\frac{\partial a_{I_1}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial a_{I_2}}{\partial x_2}=0. \tag{1.2.54}$$

Таким образом, для доказательства равенства (1.2.51), необходимо проверить комбинаторное тождество

$$\epsilon(\{i_1\},I_2)+\epsilon(\{i_2\},I_1)+\epsilon(I_1,\bar I_1)+\epsilon(I_2,\bar I_2)+\epsilon(\{i_1\},\bar I_1)+\epsilon(\{i_2\},\bar I_2)\equiv_2 1. \tag{1.2.55}$$

Подметим, что

$$\epsilon(I_1,\bar I_1)+\epsilon(\{i_1\},\bar I_1)\equiv_2\epsilon(I,\bar I_1); \tag{1.2.56}$$

$$\epsilon(I_2,\bar I_2)+\epsilon(\{i_2\},\bar I_2)\equiv_2\epsilon(I,\bar I_2). \tag{1.2.57}$$

Поэтому достаточно доказать

$$\epsilon(\{i_1\},I_2)+\epsilon(\{i_2\},I_1)+\epsilon(I,\bar I_1)+\epsilon(I,\bar I_2)\equiv_2 1. \tag{1.2.58}$$

Преобразуем левую часть, пользуясь аналогичными соображениями,

$$\begin{aligned}&\epsilon(\{i_1\},I_2)+\epsilon(\{i_2\},I_1)+\epsilon(I,\bar I_1)+\epsilon(I,\bar I_2)\\&\qquad\equiv_2\epsilon(\{i_1\},I)+\epsilon(\{i_1\},\{i_2\})+\epsilon(\{i_2\},I)+\epsilon(\{i_2\},\{i_1\})+\epsilon(I,\bar I_1)+\epsilon(I,\bar I_2)\\&\qquad\equiv_2 1+\epsilon(\{i_1\},I)+\epsilon(\{i_2\},I)+\epsilon(I,\bar I_1)+\epsilon(I,\bar I_2)\\&\qquad\equiv_2 1+2\#I+\epsilon(I,\{i_1\})+\epsilon(I,\{i_2\})+\epsilon(I,\bar I_1)+\epsilon(I,\bar I_2)\\&\qquad\equiv_2 1+\epsilon(I,J)+\epsilon(I,J)\equiv_2 1,\end{aligned} \tag{1.2.59}$$

здесь $J=\bar I_1\cap\bar I_2$. □

Глава 2

Дифференциальные формы на многообразиях

2.1 Векторные расслоения

2.1.1 Напоминание о многообразиях, определение и примеры

Многообразием размерности d называют хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, обладающее гладкой структурой. Под гладкой структурой мы понимаем максимальный по включению атлас. Атласом, в свою очередь, называют систему $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_\alpha$, где $\{U_\alpha\}_\alpha$ — открытое покрытие множества M, а $f_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^d$ — картирующее отображения, то есть, такой гомеоморфизм на окрестность нуля, что отображения перехода $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} \colon f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}^d$ — гладкие для всяких α и β.

Отметим, что зачастую нам будут нужны многообразия с краем. В таком случае, карты могут быть параметризованы открытыми подмножествами полупространства и нужно более аккуратно работать с отображениями перехода.

Определение 2.1.1. *Пусть M — гладкое d-мерное многообразие и $k \geqslant 0$ — целое число. Пара (E, π) называется векторным расслоением размерности k над многообразием M, если выполнены следующие условия*:

1) E — многообразие размерности $d+k$, $\pi \colon E \to M$ — гладкая сюръекция, для всякой точки $p \in M$ прообраз $\pi^{-1}(p)$ наделён структурой вещественного линейного пространства;

2) для всякой точки $p \in M$ существует такая окрестность $U \subset M$ и такой диффеоморфизм

$$\Phi_p \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k, \quad \text{что} \quad \Phi_p(\pi^{-1}(q)) = \{q\} \times \mathbb{R}^k \quad \forall q \in U, \tag{2.1.1}$$

и при этом, отображение $\Phi_p|_{\pi^{-1}(q)}$ — линейный изоморфизм.

Пример 2.1.2 (Тривиальное расслоение)**.** *Если M — многообразие, то многообразие $M \times \mathbb{R}^k$ с проекцией на первую координату — векторное расслоение над M размерности k.*

Отображения Φ_p, описанные во втором пункте определения, называют локальными тривиализациями.

Пример 2.1.3 (Касательное расслоение)**.** *Касательное расслоение TM — векторное расслоение размерности d (здесь d — размерность многообразия M). Отображения Φ_p в этом случае строятся так. Берётся какая-нибудь содержащая точку p карта (U, f) и векторы*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = df^{-1}[e_j], \qquad j = 1, 2, \ldots, d; \tag{2.1.2}$$

символами e_j обозначены базисные векторы пространства $\mathbb{R}^d$. Положим

$$\Phi_p\Big(p, \sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = (p, v_1, v_2, \ldots, v_j). \tag{2.1.3}$$

Замечание 2.1.4. *Векторные расслоения размерности 1 называют линейными расслоениями.*

Пример 2.1.5 (Мёбиусов лист)**.** *Факторизуем пространство $\mathbb{R}^2$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (x + n, (-1)^n y)$, для всякого целого числа n. Иными словами, мы склеиваем с переворотом противоположные стороны полосы $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Проекция на ось x задаёт на этом многообразии структуру линейного расслоения над окружностью S^1; это расслоение нетривиально.*

3.10.2024

Замечание 2.1.6. *Пусть U и V — пересекающиеся открытые подмножества многообразия M, а $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ и $\Psi\colon \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$ — соответствующие им локальные тривиализации расслоения E (предположим, что они существуют). Существует такая гладкая функция перехода $\tau\colon U \cap V \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, что $\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v)$.*

Нам понадобится вводить структуру векторного расслоения на дизъюнктном объединении $\sqcup_{p\in M} E_p$, где E_p — k-мерные вещественные линейные пространства размерности k. Отображение $\pi\colon E \to M$ в этом случае определено естественным образом. Кроме того, обычно естественным образом заданы и локальные тривиализации. Нужно лишь задать структуру многообразия на множестве E, чтобы локальные тривиализации были диффеоморфизмами.

Лемма 2.1.7. *Пусть M — многообразие размерности n, $\{E_p\}_{p\in M}$ — набор линейных пространств размерности k, $\pi\colon \sqcup_p E_p \to M$ — естественное отображение проекции. Пусть также*

- *дано открытое покрытие $\{U_\alpha\}_\alpha$;*
- *каждому множеству U_α соответствует биективное отображение $\Phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, являющееся линейным изоморфизмом в каждом из слоёв, то есть, $\Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(q)} \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ — линейное отображение для всякой точки $q \in U_\alpha$;*
- *если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, то существует гладкая функция $\tau_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, осуществляющая отображение перехода $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha,\beta}(p)v)$.*

В таком случае, на множестве $E = \sqcup_p E_p$ существует единственная такая структура векторного расслоения над многообразием M размерности k, что отображения Φ_α — локальные тривиализации.

Доказательство. Нужно ввести структуру гладкого многообразия на множестве E и убедиться в гладкости отображений π и Φ_α. Для всякой точки p выберем окрестность V, лежащую в некотором множестве U_α и рассмотрим картирующее отображение $f_V\colon V \to \mathbb{R}^d$. Назовём множество $\pi^{-1}(V)$ картой множества E и снабдим его картирующим отображением $(f_V, \mathrm{id}) \circ \Phi_\alpha$. Нетрудно видеть, что эта система отображений образует атлас и задаёт структуру расслоения на множестве E. $\square$

Теперь нам будет удобно использовать для слоёв расслоения E обозначение $E_p = \pi^{-1}(p)$.

Пример 2.1.8. *Пусть E_1 и E_2 — векторные расслоения размерностей k_1 и k_2 над многообразием M. Можно сформировать расслоение $E_1 \oplus E_2$, называемое суммой Уитни E_1 и E_2 следующим образом: $(E_1 \oplus E_2)_p = (E_1)_p \oplus (E_2)_p$. Если Φ_1 и Φ_2 — локальные тривиализации расслоений E_1 и E_2 в окрестности точки p, то в качестве локальной тривилизации $E_1 \oplus E_2$ возьмём*

$$\Phi(p, (v_1, v_2)) = \Big(p, \pi_{\mathbb{R}^{k_1}}[\Phi_1(p, v_1)], \pi_{\mathbb{R}^{k_2}}[\Phi_2(p, v_2)]\Big). \tag{2.1.4}$$

Нетрудно видеть, что отображения перехода в этом случае — просто сумма отображений:

$$\tau_{\alpha,\beta}^{E_1 \oplus E_2}(p) = \begin{pmatrix} \tau_{\alpha,\beta}^{E_1}(p) & 0 \\ 0 & \tau_{\alpha,\beta}^{E_2}(p) \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

2.1.2 Сечения векторных расслоений

Определение 2.1.9. *Пусть E — векторное расслоение. Его сечением s назовём любое такое непрерывное отображение $s\colon M \to E$, что $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Если отображение s с таким свойством гладкое, то его называют гладким сечением. Если отображение s с аналогичным свойством $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ задано лишь на открытом подмножестве $U \subset M$, то его называют локальным сечением.*

Пример 2.1.10. *Нулевое сечение — это отображение $M \ni p \mapsto 0_{E_p} \in E$. Обращаясь к локальным тривиализациям, убеждаемся, что нулевое сечение — гладкое.*

Пример 2.1.11. *Если $E = M \times \mathbb{R}^k$ — тривиальное расслоение, а $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ — гладкое отображение, то его график $s(p) = (p, f(p))$ — гладкое сечение.*

Сечения касательного расслоения TM суть векторные поля на многообразии M.

Замечание 2.1.12. *Обозначим множество всех гладких сечений расслоения E символом $\Gamma(E)$. Это множество наделено естественной структурой векторного пространства с поточечным сложением:*

$$(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p); \quad (\lambda s)(p) = \lambda s(p). \tag{2.1.6}$$

Более того, это $C^\infty(M)$-модуль:

$$fs(p) = f(p)s(p), \text{ если } s \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M). \tag{2.1.7}$$

Гладкость построенного сечения легко проверяется в картах.

Определение 2.1.13. *Систему сечений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ расслоения E назовём линейно независимой, если для всякой точки $p \in M$ векторы $\sigma_1(p), \sigma_2(p), \ldots, \sigma_k(p)$ линейно независимы. Аналогичное понятие можно ввести и для локальных сечений, заданных на одном и том же множестве. Систему $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell$ расслоения E размерности ℓ назовём базисной, если векторы $\sigma_1(p), \sigma_2(p), \ldots, \sigma_\ell(p)$ образуют базис пространства $\pi^{-1}(p)$ для всякой точки $p \in M$.*

Лемма 2.1.14. *Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ — линейно независимые сечения расслоения E размерности $\ell > k$. В окрестности каждой точки $p \in M$ существуют локальные сечения $\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_\ell$, дополняющие первые k сечений до базисной системы в окрестности точки p.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ — локальная тривиализация в окрестности точки p. Пусть $\tilde{\sigma}_j = \Phi \circ \sigma_j$. В таком случае, существуют векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_\ell$, дополняющие набор векторов $\tilde{\sigma}_1(p), \tilde{\sigma}_2(p), \ldots, \tilde{\sigma}_k(p)$ до базиса в $\mathbb{R}^\ell$. Положим

$$\sigma_j(q) = \Phi^{-1}(q, v_j), \qquad j = k+1, k+2, \ldots, \ell, \quad q \in U. \tag{2.1.8}$$

Так как Φ — диффеоморфизм, получилось гладкое сечение. Более того, ввиду непрерывности, сечения σ_j линейно независимы в некоторой окрестности точки p. $\square$

Приведённая в доказательстве леммы конструкция позволяет естественным образом сопоставить всякой локальной тривиализации базисную систему сечений: нужно просто пересадить отображением Φ^{-1} стандартный базис пространства $\mathbb{R}^\ell$. В обратную сторону: всякая локальная базисная система сечений естественным образом порождает локальную тривиализацию на той же окрестности. Действительно, пусть $\{\sigma_j\}_{j=1}^\ell$ — базисная система на U, зададим отображением $\Theta\colon U\times\mathbb{R}^\ell\to E$ по правилу

$$\Theta(p,u_1,u_2,\ldots,u_\ell)=\Big(p,\sum_{j=1}^{\ell}u_j\sigma_j(p)\Big). \tag{2.1.9}$$

Лемма 2.1.15. *Указанное в формуле* (2.1.9) *отображение — диффеоморфизм.*

Доказательство. Отображение Θ биективно, поэтому достаточно доказать, что оно локальный диффеоморфизм. Пусть (V,Φ) — локальная тривиализация расслоения E. Достаточно доказать, что $\Phi\circ\Theta$ — диффеоморфизм. Запишем:

$$\Phi\circ\Theta(p,u)=\Phi\big(p,\sum_{j=1}^{\ell}u_j\sigma_j(p)\big)=\Big(p,\sum_{j=1}^{\ell}u_j\pi_{\mathbb{R}^\ell}\big[\Phi\big(p,\sigma_j(p)\big)\big]\Big). \tag{2.1.10}$$

По условию, для всякой точки $p\in V\cap U$, векторы $\pi_{\mathbb{R}^\ell}[\Phi(p,\sigma_j(p))]$ линейно независимы. Нетрудно видеть, что якобиан[1] отображения $\Phi\circ\Theta$ — матрица вида

$$\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{d\times d} & ?\\ 0 & B\end{pmatrix}, \tag{2.1.11}$$

где строки матрицы B — векторы $\Phi(p,\sigma_j(p))$. Как нетрудно видеть, такая матрица обратима. □

Следовательно, Θ^{-1} — локальная тривиализация.

Следствие 2.1.16. *Векторное расслоение тривиально* (*то есть, для него существует глобальная трививализация*) *тогда и только тогда, когда существует глобальная базисная система сечений.*

Следствие 2.1.17. *Касательное расслоение к сфере TS^2 — нетривиально. Действительно, любое сечение этого расслоения задаёт векторное поле на сфере. По теореме о причёсывании ежа, такое поле должно обнуляться хотя бы в одной точке. Поэтому, для этого расслоения не существует глобальной базисной системы сечений.*

2.1.3 Гомоморфизмы и подрасслоения векторных расслоений

Определение 2.1.18. *Пусть E и E' — два векторных расслоения над многообразиями M и M' соответственно. Отображение $F\colon E\to E'$ назовём гомоморфизмом векторных расслоений, если*

- *отображение F гладкое*;
- *существует такое отображение $f\colon M\to M'$, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array} \tag{2.1.12}$$

  коммутативна;

[1] Не совсем корректно говорить о якобиане, ведь наше отображение действует не между областями евклидова пространства; формально нужно «распрямлять» многообразие M картирующими отображениями.

- *для всякой точки $p \in M$ отображение $F|_{E_p}$ линейно*;

Коммутативность диаграммы означает, что слои расслоения E отображаются в слои расслоения E'.

Замечание 2.1.19. *Отображение f гладкое и полностью определяется отображением F. Действительно, пусть $s_0\colon M \to E$ — нулевое сечение. Тогда $f = \pi' \circ F \circ s_0$.*

Определение 2.1.20. *Изоморфизм векторных расслоений — это гомоморфизм векторных расслоений, обратный к которому — тоже гомоморизм.*

Пример 2.1.21. *Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Тогда $df\colon TM \to TN$ — гомоморфизм касательных расслоений.*

Определение 2.1.22. *Будем говорить, что $F\colon E \to E'$ — гомоморфизм над M, где E и E' — векторные расслоения над многообразием M, если F — гомоморфизм и соответствующее отображение f тождественно.*

Любой гомоморфизм $F\colon E \to E'$ над многообразием M индуцирует линейный оператор $\mathcal{F}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ согласно формуле

$$\mathcal{F}[\sigma](p) = F(\sigma(p)). \tag{2.1.13}$$

Нетрудно видеть, что F — гомоморфизм $C^\infty(M)$-модулей.

Упражнение 2.1.23. *Пусть E и E' — два векторных расслоения над многообразием M, а $\mathcal{F}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ — гомоморфизм $C^\infty(M)$-модулей. Существует единственный гомоморфизм $F\colon E \to E'$, порождающий его по формуле* (2.1.13).

Определение 2.1.24. *Пусть E — векторное расслоение. Векторное расслоение D над тем же многообразием M называется подрасслоением E, если D — вложенное подмногообразие E, $\pi_D = \pi_E|_D$ и линейная структура $\pi_D^{-1}(p)$ наследуется из $\pi_E^{-1}(p)$.*

10.10.2024

Лемма 2.1.25. *Рассмотрим расслоение $E = \sqcup_{p\in M} E_p$. Набор линейных подпространств $D_p \subset E_p$ образует подрасслоение E тогда и только тогда, когда в окрестности любой точки существует такая линейно независимая система сечений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ расслоения E, $k = \dim D$, что $D_q = \operatorname{span}(\sigma_1(q), \sigma_2(q), \ldots, \sigma_k(q))$.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ — описанная система сечений в некоторой окрестности U точки p. Требуется доказать, что D — подмногообразие E и предъявить его тривиализации (доказать, что $(D, \pi|_D)$ — расслоение над многообразием M). При помощи леммы 2.1.14 достроим нашу систему до базисной системы сечений и рассмотрим тривиализацию $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^\ell$, заданную по правилу

$$\Phi\Big(p, \sum_{j=1}^{\ell} v_j \sigma_j(p)\Big) = (p, v_1, v_2, \ldots, v_\ell). \tag{2.1.14}$$

Мы воспользовались леммой 2.1.15, чтобы обосновать тот факт, что Φ — тривиализация. В таком случае,

$$\pi^{-1}(U) \cap D = \Phi^{-1}\Big(\big\{(p, w) \in U \times \mathbb{R}^\ell \bigm| w_{k+1} = w_{k+2} = \ldots = w_\ell = 0\big\}\Big), \tag{2.1.15}$$

что и задаёт структуру подмногообразия на множестве D. В качестве тривиализации можно выбрать сужение отображения Φ на множество D.

В обратную сторону, если D — подрасслоение E, то рассмотрим какую-нибудь локальную базисную систему $s_1, s_2, \ldots, s_k$ расслоения D. Искомые сечения строятся по формуле $\sigma_j = \tau \circ s_j$, где $\tau\colon D \to E$ — естественное вложение. $\square$

Определение 2.1.26. *Пусть E и E' — векторные расслоения над многообразием M, $F\colon E \to E'$ — гомоморфизм расслоений. Будем говорить, что F — постоянного ранга, если ранг линейного отображения $F|_{E_p}$ не зависит от точки p.*

Теорема 2.1.1. *Пусть E и E' — векторные расслоения над многообразием M, $F\colon E \to E'$ — гомоморфизм постоянного ранга. В таком случае, $\sqcup_{p\in M} \operatorname{Ker} F|_{E_p}$ и $\sqcup_{p\in M} \operatorname{Im} F|_{E_p}$ — подрасслоения расслоений E и E' соответственно.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\sqcup_{p\in M} \operatorname{Im} F|_{E_p}$ — подрасслоение. Мы хотим проверить выполнения условий леммы 2.1.25. Зафиксируем точку $p \in M$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell$ — базисная система сечений расслоения E в окрестности точки $p \in M$. Рассмотрим сечения $\sigma'_j = F\circ\sigma_j$; это гладкие сечения расслоения E'. Кроме того, для всякой точки q справедливо включение $\tilde\sigma_j(q) \in \operatorname{Im} F|_{E_q}$. Пусть, не умаляя общности, $\tilde\sigma_1(p), \tilde\sigma_2(p), \ldots, \tilde\sigma_{\ell'}(p)$ — базис пространства $\operatorname{Im} F|_{E_p}$. Тогда, по непрерывности выбранных сечений, векторы $\tilde\sigma_1(q), \tilde\sigma_2(q), \ldots, \tilde\sigma_{\ell'}(q)$ линейно независимы, если точка q лежит в достаточно малой окрестности точки p. Следовательно, по предположению о постоянстве ранга, эти векторы составляют базис пространства $\operatorname{Im} F|_{E_q}$. По лемме 2.1.25, $\sqcup_{p\in M} \operatorname{Im} F|_{E_p}$ — подрасслоение расслоения E'.

Чтобы доказать, что $\sqcup_{p\in M} \operatorname{Ker} F|_{E_p}$ — подрасслоение, представим его как образ локального гомоморфизма постоянного ранга расслоения E в себя. Ввиду доказанного, этого достаточно. Пусть V_q — порождённое векторами $\sigma_1(q), \sigma_2(q), \ldots, \sigma_{\ell'}(q)$ подпространство пространства E_q; оно естественным образом изоморфно пространству $\operatorname{Im} F|_{E_q}$. Пусть $F^{-1}\colon\ \operatorname{Im} F \to \sqcup_q V_q$ — осуществляющий этот изоморфизм оператор. Нетрудно видеть, что это локальный изоморфизм векторных расслоений. Рассмотрим оператор

$$E \ni v \quad\longmapsto\quad v - F^{-1}\circ F(v) \in E. \tag{2.1.16}$$

Такой оператор тождественнен на $\operatorname{Ker} F$ и обнуляется на $\sqcup_q V_q$. Следовательно, образ этого оператора — в точности $\operatorname{Ker} F$ и искомый гомоморфизм построен. □

Следствие 2.1.27. *Пусть M — вложенное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^d$. В таком случае, касательное расслоение TM является подрасслоением тривиального расслоения $M\times\mathbb{R}^d$. Рассмотрим оператор ортогонального проектирования $\pi_p\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ пространства $\mathbb{R}^d$ на T_pM. Семейство таких операторов задаёт гомоморфизм расслоений ранга $\dim M$. Ядро этого гомоморфизма называют нормальным расслоением NM многообразия M.*

Замечание 2.1.28. *Пусть $E = \sqcup_{p\in M} E_p$ — векторное расслоение над многообразием M. На семействе двойственных пространств $E^* = \sqcup_{p\in M} E_p^*$ можно ввести структуру векторного расслоения следующим естественным образом. Пусть $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U\times\mathbb{R}^\ell$ — локальная тривиализация расслоения E, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell$ — соответствующая ей локальная базисная система сечений. В качестве локальной тривиализации расслоения E^* возьмём порождённую (по формуле (2.1.9)) сечениями $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_\ell^*$, где для всякой точки q система $\{\sigma_j^*(q)\}_j$ биортогональна системе $\{\sigma_j(q)\}_j$. В таком случае, функции перехода $\tau^*_{\alpha,\beta}$ «расслоения» E^* вычисляются по формуле*

$$\tau^*_{\alpha,\beta}(p) = (\tau_{\beta,\alpha})^*(p), \tag{2.1.17}$$

где сопряжение в правой части формулы означает сопряжение матриц. Следовательно, для набора $\sqcup_{p\in M} E_p^*$ выполнены условия леммы 2.1.7 и E^* — действительно расслоение.

Ввиду последнего замечания, мы можем наделить множество T^*M структурой векторного расслоения — получится *кокасательное расслоение.*

Замечание 2.1.29. *Пусть E и E' — два векторных расслоения над многообразием M. Определим расслоение $E\otimes E'$ естественным образом. В таком случае, функции перехода просто тензорно умножатся, и тоже будут удовлетворять условию леммы 2.1.7.*

Как следствие, мы можем определить структуру векторного расслоения на пространстве $(T^*)^{\otimes k}M$ ковекторов ранга k. Линейный оператор $\mathrm{Alt}\colon (T^*)^{\otimes k}M \to (T^*)^{\otimes k}M$ задаёт гомоморфизм расслоений постоянного ранга и, благодаря теореме 2.1.1, позволяет задать структуру векторного расслоения на пространстве $\Lambda^k T^*M$.

2.2 Дифференциальные формы на многообразиях

2.2.1 Дифференциальное исчисление

Определение 2.2.1. *Дифференциальной формой ранга k на многообразии M называют сечение расслоения $\Lambda^k T^*M$. Обозначение: $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$.*

Замечание 2.2.2. *Множество $\Omega^k(M)$ — модуль над кольцом $C^\infty(M)$.*

Замечание 2.2.3. *Дифференциальные формы можно поточечно умножать:*

$$\omega \wedge \eta|_p = \omega|_p \wedge \eta|_p. \tag{2.2.1}$$

Пример 2.2.4. *Пусть $f \in C^\infty(M)$. Тогда $df \in \Omega^1(M)$. На касательный вектор $v \in T_pM$ в точке $p \in M$ эта форма действует так: $df|_p[v] = D_v f(p)$, где $D_v f$ — производная в направлении вектора v функции f.*

Пусть (U, f) — карта многообразия M. Она естественным образом определяет векторные поля $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1}^d$ на окрестности U (см. формулу (2.1.2)), а следовательно, и дифференциальные формы $\{dx^j\}_{j=1}^d$. Из них можно, опираясь на развитую в главе 1 теорию, построить локальную базисную систему сечений расслоения $\Omega^k(M)$:

$$\Big\{dx^I \;\Big|\; I = (i_1, i_2, \ldots, i_k),\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant d\Big\}. \tag{2.2.2}$$

Определение 2.2.5. *Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий. Определим пересадку формы $\omega \in \Omega^k(N)$ по правилу*

$$F^*\omega|_p[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \omega|_{F(p)}[dF|_p v_1, dF|_p v_2, \ldots, dF|_p v_k], \qquad v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM. \tag{2.2.3}$$

Ясно, что это определение согласовано со старым определением 1.2.4. Поэтому, в частности, пересадка коммутирует с операцией внешнего произведения.

В следующих примерах мы рассматриваем сужение различных форм евклидова пространства на его подмногообразия, то есть, их пересадки отображениями вложения многообразия в $\mathbb{R}^d$. В некотором роде, это обобщения примера 1.2.8.

Пример 2.2.6. *Пусть $d = 2$, $k = 1$ и $\omega = x\,dy - y\,dx$. Вычислим сужение формы ω на кривую*

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x\} \tag{2.2.4}$$

(график косинуса). Параметризуем нашу кривую осью x. Тогда касательная к кривой описывается уравнением $dy = -\sin x\,dx$, которое надо понимать следующим образом: для всякой точки $p = (x, \cos x)$ на нашей кривой пространство $T_p\gamma$ является множеством нулей линейной функции $dy + \sin x\,dx$. Поэтому,

$$\omega = x\,dy - y\,dx = x(-\sin x\,dx) - \cos x\,dx = -(\cos x + x\sin x)\,dx. \tag{2.2.5}$$

Пример 2.2.7. *Пусть $d = 3$, и $k = 2$. Вычислим сужение формы*

$$\omega = (x - y)\, dx \wedge dy + (y - z)\, dy \wedge dz + (z - x)\, dz \wedge dx \tag{2.2.6}$$

на единичную сферу в $\mathbb{R}^3$. Уравнение касательной плоскости к сфере — $x\, dx + y\, dy + z\, dz = 0$, или $dz = -x/z\, dx - y/z\, dy$. Подставим:

$$\begin{aligned} w = (x - y)\, dx \wedge dy - (y - z)\, dy \wedge \Big(-\frac{x}{z}\, dx - \frac{y}{z}\, dy\Big) + (x - z)\, dx \wedge \Big(-\frac{x}{z}\, dx - \frac{y}{z}\, dy\Big) \\ = \Big((x - y) + \frac{y - z}{z} \cdot x - \frac{x - z}{z} \cdot y\Big)\, dx \wedge dy = 0. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Это не удивительно, потому что

$$\omega = (x\, dx + y\, dy + z\, dz) \wedge (dx + dy + dz). \tag{2.2.8}$$

Аналогичные вычисления можно проводить и в случае подмногообразия большей коразмерности. В этом случае нужно решать систему линейных уравнений относительно элементарных форм.

Упражнение 2.2.8. *Вычислите сужение формы $xdx + ydy + zdz$ на кривую $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Определение 2.2.9. *Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$. Определим дифференциал $d\omega$ как такой единственный элемент множества $\Omega^{k+1}(M)$, что в любой карте (U, f) справедливо тождество*

$$d\omega = f_\alpha^* d(f_\alpha^*)^{-1}\omega. \tag{2.2.9}$$

Замечание 2.2.10. *Корректность определения следует из того, что на евклидовом пространстве дифференциал коммутирует с пересадкой (пункт 4 предложения 1.2.10).*

Теорема 2.2.1. *Пусть M — многообразие. Существует единственная операция $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, d - 1$, обладающая следующими свойствами:*

1) операция d линейна;

2) справедливо соотношение (1.2.17), если $\alpha \in \Omega^k(M)$;

3) $d \circ d = 0$;

4) если $f \in \Omega^0(M)$, то $df(X) = Xf$.

Под действием поля на функцию мы понимаем дифференцирование вдоль этого поля.

Упражнение 2.2.11. *Докажите теорему 2.2.1.*

17.10.2024

Дифференциал удобно выражать через скобку Ли. Напомним, что касательные векторы можно интерепретировать как дифференцирования. Векторному полю соответствует дифференциальный оператор первого порядка — дифференцирование вдоль этого векторного поля. Скобка Ли векторных полей определяется как векторное поле, заданное дифференциальным оператором $[X, Y] = XY - YX$.

Теорема 2.2.2. *Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$, а X и Y — векторные поля на многообразии M. В таком случае,*

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \tag{2.2.10}$$

Доказательство. Так как доказываемая формула линейна по ω, не умаляя общности, можем считать, что $\omega = u\,dv$ для некоторых гладких функций u и v на многообразии M. В таком случае,

$$d\omega = du \wedge dv \quad \text{и} \quad d\omega(X,Y) = Xu \cdot Yv - Xv \cdot Yu \tag{2.2.11}$$

(мы просто воспользовались определением внешнего произведения через альтернирование). Распишем правую часть:

$$X\omega(Y) = X(u \cdot Yv) = Xu \cdot Yv + u \cdot XYv; \tag{2.2.12}$$
$$Y\omega(X) = Y(u \cdot Xv) = Yu \cdot Xv + u \cdot YXv; \tag{2.2.13}$$
$$\omega([X,Y]) = u \cdot (XY - YX)v. \tag{2.2.14}$$

Подставляя это всё в доказываемую формулу, получаем тождество. □

Упражнение 2.2.12. *Теорему* 2.2.2 *можно обобщить на случай форм старшего ранга. Пусть* $\omega \in \Omega^k(M)$, $X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}$ *— гладкие векторные поля на многообразии* M. *Тогда*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, X_2 \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (-1)^{i+j} \omega\Big([X_i, X_j], X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{k+1}\Big). \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

2.2.2 Интегрирование дифференциальных форм

Определение 2.2.13. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^d$ *— открытое множество,* $\omega \in \Omega^d(U)$, $\omega = f(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^d$. *Пусть у функции* f *компактный носитель. В таком случае, положим*

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U f(x)\,dx. \tag{2.2.16}$$

Предложение 2.2.14. *Пусть* $F\colon U \to V$ *— собственный диффеоморфизм между открытыми связными множествами в* $\mathbb{R}^d$, *пусть* $\omega \in \Omega^d(V)$ *— дифференциальная форма с компактным носителем. Если отображение* F *сохраняет ориентацию, то*

$$\int\limits_V \omega = \int\limits_U F^*\omega, \tag{2.2.17}$$

если же он изменяет ориентацию, то

$$\int\limits_V \omega = -\int\limits_U F^*\omega. \tag{2.2.18}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ — координаты в области U, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ — координаты в области V, то

$$F^*\omega = f\big(F(x)\big)\,dF_1(x) \wedge dF_2(x) \wedge \ldots \wedge dF_d(x) = f\big(F(x)\big) \det\big(dF(x)\big)\,dx, \tag{2.2.19}$$

если $\omega = f(y)\,dy$. Поэтому

$$\int\limits_U F^*\omega = \int\limits_U f(F(x)) \det\big(dF(x)\big)\,dx. \tag{2.2.20}$$

С другой стороны, мы можем воспользоваться формулой замены переменной в интеграле Лебега:

$$\int_V \omega = \int_V f(y)\,dy = \int_V f(F(x))dF(x) = \int_V f(F(x))\big|\det(dF(x))\big|\,dx. \tag{2.2.21}$$

Остаётся вспомнить, что так как отображение F — диффеоморфизм, функция $\det(dF)$ не меняет знак на всей области определения: её знак положительный, если отображение F сохраняет ориентацию и отрицательный, если меняет. $\square$

Для интегрирования нам придётся учитывать ориентацию многообразия. Пусть M — ориентируемое многообразие размерности d. Выбор ориентации позволяет говорить положительности и отрицательности базисов касательного пространства. Об ориентации многообразия можно думать как о выборе согласованной системы локальных базисных систем сечений касательного расслоения: операторы перехода между такими системами должны иметь положительный определитель. Ориентация позволяет говорить о положительности или отрицательности d-формы в точке многообразия: знак значения формы на базисе зависит лишь от знака этого базиса и форма называется положительной в данной точке, если её значение на положительных базисах положительно, и отрицательной в противном случае. В обратную сторону: ориентацию можно задать, выбрав d-форму ω, не обращающуюся в ноль ни в какой точке многообразия M и объявив положительными ровно те базисы $v_1, v_2, \ldots, v_d$ пространства T_pM, для которых $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_d) > 0$. Будем говорить, что карта (U, f) положительна, если соответствующий ей согласно формуле (2.1.2) базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_j$ положительно определён.

Упражнение 2.2.15. *Лист Мёбиуса нельзя ориентировать.*

Пусть M — ориентированное многообразие. Вложенное в M подмногообразие N коразмерности 1 можно ориентировать тогда и только тогда, когда существует векторное поле X, всюду трансверсальное N: форма ориентации ω многообразия M в таком случае задаёт форму ориентации на N по формуле

$$\tilde{\omega}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{d-1}) = \omega(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{d-1}), \qquad Y_1, Y_2, \ldots, Y_{d-1} \in TN. \tag{2.2.22}$$

Этот же способ позволяет задать ориентацию края многообразия.

Определение 2.2.16. *Пусть $\omega \in \Omega^d(M)$, где M — ориентируемое многообразие размерности d. Пусть $\operatorname{supp}\omega \in U$, где (U, f) — положительно ориентированная карта. Положим*

$$\int_M \omega = \int_{f(U)} (f^{-1})^*\omega. \tag{2.2.23}$$

Замечание 2.2.17. *Согласно предложению* 2.2.14, *определение не зависит от выбора карты (U, f), так как якобиан отображения перехода между двумя положительными картами положителен.*

Определение 2.2.18. *Пусть $\omega \in \Omega^d(M)$ — форма с компактным носителем на ориентируемом многообразии. Определим её интеграл следующим образом: выберем какое-то конечное покрытие носителя ω положительными картами (U_α, f_α), а также подчинённое этому покрытию разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$. Положим*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \varphi_\alpha \omega; \tag{2.2.24}$$

определение корректно, так как носители форм $\varphi_\alpha\omega$ лежат в соответствующих картах.

Замечание 2.2.19. *Приведённое определение не зависит от выбора разбиения единицы. Действительно, пусть* $\{\psi_\beta\}_\beta$ *— другое разбиение единицы. Тогда*

$$\int\limits_M \omega = \sum_\alpha \int\limits_M \varphi_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int\limits_M \psi_\beta \varphi_\alpha \omega = \sum_\beta \int\limits_M \psi_\beta \omega, \tag{2.2.25}$$

так как локальные интегралы не зависят от выбора карт.

Перечислим простые свойства построенного интеграла. Он линейный, положительный (если ω — положительная форма, то $\int_M \omega > 0$) и инвариантный относительно замены переменной:

$$\int\limits_M F^*\omega = \pm \int\limits_N \omega, \tag{2.2.26}$$

знак выбирается в зависимости от того, отображение F сохраняет или меняет ориентацию (это следует из предложения 2.2.14).

Пример 2.2.20. *Пусть* S^2 *— единичная сфера пространства* $\mathbb{R}^3$, *ориентированная полем внешних нормалей, а*

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy. \tag{2.2.27}$$

Вычислим $\int_{S^2} \omega$. *Достаточно разобраться с интегралом формы* $z\,dx \wedge dy$. *Параметризуем сферу графиками функций* $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$:

$$\int\limits_{S^2\cap\{z>0\}} z\,dx \wedge dy = \int\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{s}\,ds = \frac{2\pi}{3}. \tag{2.2.28}$$

Почему мы выбрали знак " $+$ *"? Нужно выбрать какую-нибудь точку на поверхности и посмотреть, положительна ли наша параметризация. Возьмём, например, точку* $(0,0,1)$ *и убедимся в положительности параметризации: стандартный базис пространства* $\mathbb{R}^2$ *переходит в первые два вектора стандартного базиса в* $\mathbb{R}^3$ *(которые являются элементами касательного пространства к сфере в точке* $(0,0,1)$*). В случае нижней полусферы параметризация отрицательна, но и подынтегральное выражение меняет знак. Следовательно, весь искомый интеграл равен* 4π.

Этот же интеграл можно вычислить и по-другому. Рассмотрим параметризацию сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\psi, \\ y = \cos\varphi\sin\psi, \qquad \varphi \in [-\pi,\pi),\ \psi \in [0,2\pi). \\ z = \sin\varphi, \end{cases} \tag{2.2.29}$$

В таком случае,

$$dx \wedge dy = -\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \wedge d\psi. \tag{2.2.30}$$

Посмотрев на образ базисных векторов, можно убедиться, что наша параметризация отрицательна. Следовательно,

$$\int\limits_{S^2} z\,dx \wedge dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi\,d\psi\,d\varphi = \frac{4\pi}{3}. \tag{2.2.31}$$

Остаётся опять умножить на 3.

Упражнение 2.2.21. *Вычислите интеграл формы*

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \tag{2.2.32}$$

по поверхности $z = x^2 - y^2$, $|y| \leqslant x \leqslant 1$, *ориентированной постоянным полем векторов* $(0,0,1)$.

2.2.3 Формула Стокса

24.10.2024

Чтобы сформулировать формулу Стокса, нам понадобится работать с многообразиями с краем. Теория векторных расслоений и язык дифференциальных форм естественным образом переносится на многообразия с краем. Кроме того, ориентация многообразия естественным образом задаёт ориентацию края выбором внешнего или внутреннего направления трансверсального к краю поля. Мы будем неформально называть это выбором внешней или внутренней «нормали».

Теорема 2.2.3 (Формула Стокса)**.** *Пусть M — ориентированное многообразие с краем, $\omega \in \Omega^{d-1}(M)$ — форма с компактным носителем. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega, \tag{2.2.33}$$

если многообразие ∂M ориентировано внешней нормалью.

В правой части ω понимается как пересадка формы ω естественным вложением ∂M в M.

Пример 2.2.22. *Вернёмся к примеру* 2.2.20*. Пусть M — единичный шар. Тогда ∂M — ориентированная внешней нормалью сфера. В таком случае,*

$$d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz, \tag{2.2.34}$$

и по формуле Стокса

$$\int\limits_{S^2} \omega = \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} 3dx \wedge dy \wedge dz = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi. \tag{2.2.35}$$

Напомним обозначение $\bar{U}$ для замыкания области U.

Следствие 2.2.23 (Теорема Гаусса–Грина–Остроградского)**.** *Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^d$, $f\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ — гладкое векторное поле. Справедлива формула*

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} f = \int\limits_{\partial\Omega} \langle f, \vec{n}\rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}|_{\partial\Omega}, \tag{2.2.36}$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к границе области Ω.

Доказательство. Положим $M = \Omega$. Зададим форму ω, используя обозначения (1.2.1) (см. также диаграмму (1.2.38)):

$$\omega = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} f_j(x) \, dx^{[1\,..\,d]\setminus\{j\}}. \tag{2.2.37}$$

В таком случае, $d\omega = (\operatorname{div} f)\, dx$ и левая часть формулы (2.2.36) совпадает с $\int_M d\omega$. Стало быть, благодаря формуле Стокса, достаточно проверить тождество

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{\partial\Omega} \langle f, \vec{n}\rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}|_{\partial\Omega}. \tag{2.2.38}$$

Не умаляя общности, можем считать, что носитель поля f лежит в малой окрестности некоторой точки $x \in \partial\Omega$. В виду инвариантности обеих частей формулы относительно сдвигов и поворотов, можем также считать, что в окрестности начала координат область Ω описывается как надграфик гладкой функции $F\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, то есть,

$$\Omega \cap \big(B_\varepsilon(0) \times (-\delta, \delta)\big) = \Big\{ y \in B_\varepsilon(0) \,\Big|\, F(y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \leqslant y_d < \delta \Big\}. \tag{2.2.39}$$

Здесь символом $B_\varepsilon(0)$ обозначен евклидов шар с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^{d-1}$ малого положительного радиуса ε, а число δ также достаточно мало. В таком случае, вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке $(x, F(x))$ вычисляется по формуле

$$\vec{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla F(x)|^2}}\Big(\nabla F(x), -1\Big), \qquad x \in B_\varepsilon(0). \tag{2.2.40}$$

Следовательно, по формуле замены переменной в поверхностном интеграле первого рода,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \langle f, \vec{n}\rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}|_{\partial\Omega} = \int\limits_{B_\varepsilon(0)} \langle f(x), \vec{n}(x)\rangle \sqrt{1 + |\nabla F(x)|^2}\, dx$$

$$= \int\limits_{B_\varepsilon(0)} \Big(- f_d(x) + \sum_{j=1}^{d-1} f_j(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\Big)\, dx. \tag{2.2.41}$$

Приступим к вычислению интеграла в левой части формулы (2.2.38), выяснив для начала ориентацию отображения $\mathbb{R}^{d-1} \ni x \mapsto (x, F(x)) \in \partial\Omega$. Нетрудно видеть (вспоминая, как внешняя нормаль ориентирует поверхность $\partial\Omega$), что оная ориентация совпадает со знаком базиса $(-e_d, e_1, e_2, \ldots, e_{d-1})$, то есть, равна $(-1)^d$. Стало быть,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = (-1)^d \int\limits_{B_\varepsilon(0)} (-1)^{d-1} f_d(x)\, dx + \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^{j-1} f_j(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dF(x) =$$

$$(-1)^d \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^{j-1} \int\limits_{B_\varepsilon(0)} f_j(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\, dx^{[1\,..\,d]\setminus\{j\}} \wedge dx^j + \int\limits_{B_\varepsilon(0)} f_d(x)\, dx, \tag{2.2.42}$$

что совпадает с (2.2.41). □

Доказательство теоремы 2.2.3. Начнём рассмотрение с двух частных случаев.

Случай 1. Пусть $M = \mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d \geqslant 0\}$. В таком случае,

$$\omega = \sum_{j=1}^{d} f_j(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^d. \tag{2.2.43}$$

В левой части формулы Стокса получится величина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx. \tag{2.2.44}$$

Из компактности носителя формы ω и формулы Ньютона–Лейбница следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx = 0 \tag{2.2.45}$$

при $j \neq d$. Из тех же соображений,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial f_d}{\partial x_d} dx = - \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, 0)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{d-1}. \tag{2.2.46}$$

Следовательно,

$$\int\limits_M d\omega = (-1)^d \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, 0)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{d-1}. \tag{2.2.47}$$

С другой стороны, из примера 1.2.8 следует, что

$$\omega|_{\mathbb{R}^{d-1}} = f_d\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{d-1}. \tag{2.2.48}$$

Следовательно, левая и правая части формулы Стокса в этом случае совпадают с точностью до знака, и для совпадения знаков требуется проверить, что ориентация базиса

$$\Big(-e_d, e_1, e_2, \ldots, e_{d-1} \Big) \quad \text{равна} \quad (-1)^d, \tag{2.2.49}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$ (ориентация края многообразия задаётся формулой (2.2.22)). Это действительно правда.

Случай 2. Пусть $M = \mathbb{R}^d$. В этом случае граница пустая, и доказательство аналогично рассмотрениям предыдущего случая.

Теперь перейдём к более общим случаям.

Случай 3. Пусть теперь M — произвольное ориентированное многообразие, но носитель формы ω лежит в некоторой карте (U, f). Не умаляя общности, будем считать, что карта ориентирована положительно. В таком случае,

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{f(U)} \left(f^{-1}\right)^*[d\omega] = \int\limits_{f(U)} d\Big[\left(f^{-1}\right)^* \omega\Big]. \tag{2.2.50}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{f(U \cap \partial M)} \left(f^{-1}\right)^* \omega. \tag{2.2.51}$$

Поэтому этот случай сводится к одному из первых двух.

Случай 4. Если ω — произвольная форма, то воспользуемся разложением единицы $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$, носитель каждой функции которого лежит в некоторой карте. Запишем:

$$\int\limits_M d\omega = \sum_\alpha \int\limits_M d[\varphi_\alpha \omega] = \sum_\alpha \int\limits_{\partial M} \varphi_\alpha \omega = \int\limits_{\partial M} \omega. \tag{2.2.52}$$

□

Следствие 2.2.24. *Если M — компактное ориентированное многообразие без края, то $\int_M \eta = 0$ для любой точной формы η.*

Следствие верно и для некомпактных многообразий, но в этом случае нужно делать оговорки насчёт точности формы η: должна существовать такая форма ω с компактным носителем, что $\eta = d\omega$.

Следствие 2.2.25. *Если N — край некоторого ориентированного многообразия M размерности d, а $(d-1)$-форма η на M замкнута и имеет компактный носитель, то $\int_N \eta = 0$.*

Вернёмся к примеру 1.2.15. Рассматриваемая в нём форма $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ замкнута, но не точна в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. По сути, доказывая это, мы проверили частный случай следствия 2.2.24: мы вычислили интеграл ω по многообразию S^1, и он оказался не нулевым. Применив следствие 2.2.25, мы видим, что окружность не является границей компактного подмногообразия области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пример 2.2.26. *Рассмотрим окружность* $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x + y + z = 0\}$, *ориентированную вектором* $(0, 0, 1)$ *и проинтегрируем по ней форму* $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz$. *Сначала разберёмся с ориентацией контура. Вообще говоря, для ориентации контура нужно задать два векторных поля. Однако в* $\mathbb{R}^3$ *подразумевается правило правого буравчика. Выбранный вектор задаёт ориентацию плоскости* $x + y + z = 0$ *и ориентацию окружности* L *внутренней нормалью.*

Воспользуемся формулой Стокса:

$$\int\limits_L y\,dx+z\,dy+x\,dz = -\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\\ x+y+z=0}} dy\wedge dx+dz\wedge dy+dx\wedge dz = -\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\\ x+y+z=0}} dy\wedge dx-dx\wedge dy-dx\wedge dy = 3\int\limits_{x^2+y^2+(x+y)^2\leqslant R^2} dx\,dy, \quad (2.2.53)$$

в формуле Стокса знак "-", потому что мы ориентировали контур внутренней нормалью. Сделаем замену $p = x + y/2$, $q = \sqrt{3}/2y$, $dx \wedge dy = \sqrt{3}/2\,dp \wedge dq$ *и продолжим вычисление*:

$$3\int\limits_{x^2+y^2+(x+y)^2\leqslant R^2} dx\,dy = 3\int\limits_{p^2+q^2\leqslant R^2/2} \frac{2}{\sqrt{3}}\,dp\wedge dq = \sqrt{3}\pi R^2. \quad (2.2.54)$$

Упражнение 2.2.27. *Пусть*

$$\Gamma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, z^2\big(1 + \frac{\sin z}{239}\big) = x^2 + y^2, \quad z \geqslant 0\Big\}. \quad (2.2.55)$$

Вычислите интегральчик

$$\int\limits_\Gamma \left(\frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{dy\wedge dz}{(1+y^2+z^2)^2} + \frac{dz\wedge dx}{(1+z^2+x^2)^2}\right). \quad (2.2.56)$$

Мы сформулировали и доказали формулу Стокса для гладких многообразий с краем. Однако зачастую её приходится применять к областям и многообразиям с негладкой границей. Например, к кубам или тетраэдрам. Разумную общность формуле Стокса придают многообразия с углами. Вкратце опишем эту теорию. Символом $(\mathbb{R}_+)^d$ будем обозначать угол $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall j\ x_j \geqslant 0\}$.

Определение 2.2.28. *Хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой* M *назовём многообразием с углами, если существует такое его открытое покрытие* $\{U_\alpha\}_\alpha$ *и система гомоморфизмов на образ* $f_\alpha\colon U_\alpha \to (\mathbb{R}_+)^d$, *что отображения перехода между такими картами гладкие.*

Напомним, что отображение $F\colon X \to \mathbb{R}^d$, где $X \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное множество, называется гладким, если оно продолжается до гладкого в некоторой окрестности множества X отображения.

В основном, теория многообразий с углами аналогична теории многообразий с краем. Важнейшее отличие состоит в том, что граница многообразия с углами сама не обязательно является многообразием с углами. Примером может служить граница самого множества $(\mathbb{R}_+)^d$ при $d \geqslant 2$.

Упражнение 2.2.29. *Докажите, что не существует изоморфизма алгебр* $C^\infty(\mathbb{R})$ *и* $C^\infty(\partial(\mathbb{R}_+)^2)$.

Однако граница многообразия с углами локально является конечным объединением многообразий с углами меньшей размерности. Поэтому по ней можно интегрировать, и справедлива формула Стокса.

Вообще говоря, разумно поставить вопрос о том, к областям и многообразиям насколько общего вида можно применять формулу Стокса. В полной общности, ответ на этот вопрос даётся теорией потоков. Мы опишем ответ в менее абстрактной ситуации формулы Гаусса–Остроградского.

Определение 2.2.30. *Ограниченное борелевское множество $E \subset \mathbb{R}^d$ назовём множеством конечного периметра, если обобщённая функция $\nabla \chi_E$ есть заряд конечной вариации; полная вариация заряда $\nabla \chi_E$ в таком случае считается периметром множества E.*

Теорема 2.2.4. *Пусть E — множество конечного периметра. Существует такие борелевски измеримое подмножество $\partial_r E \subset \partial E$, называемое приведённой границей множества E, и борелевская функция $\nu\colon \partial_r E \to S^{d-1}$, что для всякого гладкого векторного поля f справедлива формула Гаусса–Остроградского*

$$\int\limits_E \operatorname{div} f = \int\limits_{\partial_r E} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}|_{\partial_r E}. \tag{2.2.57}$$

В частности, $(d-1)$-мера Хаусдорфа приведённой границы множества E конечна. Теорема 2.2.4 принадлежит к области геометрической теории меры, и её доказательство выходит за рамки настоящего курса. Заинтересованный читатель может обратиться к теоремам 3.36 и 3.59 книги [1] или шестой главе конспекта [5].

Глава 3

Приложения к топологии

3.1 Теоремы о сглаживании

Символом I обозначим отрезок $[a, b]$. Напомним, что непрерывные отображения $F, G\colon X \to Y$ называют гомотопными, если существует такое непрерывное отображение $H\colon X \times I \to Y$, что $H(x, a) = F(x)$ и $H(x, b) = G(x)$. Конечно же, это свойство не зависит от выбора отрезка $[a, b]$. Если $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то F гомотопно G относительно множества A, если сужение отображения H на множество $A \times I$ не зависит от второй переменной (в частности, $F|_A = G|_A$). Наконец, если множества X и Y наделены гладкими структурами, то можно говорить о гладкой гомотопности (отображение H в этом случае должно быть гладким).

Теорема 3.1.1. *Пусть M и N — гладкие многообразия (возможно, с краем), а F и G — гомотопные отображения M в N. В таком случае, они гладко гомотопны. В случае, если отображения F и G гомотопны относительного некоторого замкнутого множества A, то они и гладко гомотопны относительно него.*

Доказательство основано на теореме Уитни о приближении и было в курсе дифференциальной геометрии. Напомним, что два пути гомотопны, если они гомотопны относительно точек 0 и 1.

Теорема 3.1.2. *Пусть M — гладкое многообразие, $\omega \in \Omega^1(M)$ — замкнутая форма на многообразии M. Если пути γ_1 и γ_2 гомотопны в M, то $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.*

Доказательство. Пусть p — общее начало путей, q — их общий конец. Согласно теореме о гладких гомотопиях, можем считать, что существует такое гладкое отображение $H\colon [0,1]^2 \to M$, что

$$H(0, t) = p,\ H(1, t) = q, \quad t \in [0, 1]; \tag{3.1.1}$$

$$H(x, 0) = \gamma_1(x),\ H(x, 1) = \gamma_2(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{3.1.2}$$

В таком случае,

$$\int\limits_{\gamma_i} \omega = \int\limits_{H^{-1}(\gamma_i)} H^*\omega, \quad i = 1, 2. \tag{3.1.3}$$

Обозначим границу квадата $[0, 1]^2$ символом Γ, это конечное объединение многообразий с углами. В виду замкнутости формы $H^*\omega$, следствие 2.2.25 влечёт справедливость тождества $\int_\Gamma H^*\omega = 0$. Так как $H|_{\{0\}\times[0,1]} = x_0$ и $H|_{\{1\}\times[0,1]} = y_0$, форма $H^*\omega$ на соответствующих сторонах квадрата тождественно равна нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{[0,1]\times\{0\}} H^*\omega = \int\limits_{[0,1]\times\{1\}} H^*\omega, \tag{3.1.4}$$

а они равны, соответственно, $\int_{\gamma_1} \omega$ и $\int_{\gamma_2} \omega$ по формуле (3.1.3). □

31.10.2024

Следствие 3.1.1. *Любая замкнутая 1-форма на односвязном многообразии точна.*

Доказательство. Пусть ω — замкнутая форма. Зафиксируем точку $x_0 \in M$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega, \tag{3.1.5}$$

где интеграл берётся по любому гладкому пути, соединяющему точку x_0 с точкой x. Теорема 3.1.2 гласит, что значение интеграла не зависит от выбора пути. Докажем, что $df = \omega$. Это локальное утверждение, и поэтому достаточно доказывать его для случая подобласти $\mathbb{R}^d$. Отметим, что замена точки x_0 другой точкой меняет функцию f на постоянную величину, и поэтому на доказываемое тождество не влияет. Следовательно, мы можем считать, что точки x_0 и x лежат в одной карте. В этом случае, пусть

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \cdots + \omega_d dx^d. \tag{3.1.6}$$

Достаточно доказать тождество $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \omega_1$. Запишем

$$f(x) = f(0, x_2, x_3, \ldots, x_d) + \int_{0}^{x_1} \omega_1(s, x_2, x_3, \ldots, x_d)\, ds, \tag{3.1.7}$$

эта формула следует из того принципа, что в определении функции f мы вольны выбирать кривую, соединяющую точки x и x_0. Остаётся воспользоваться формулой дифференцирования интеграла. □

3.2 Когомологии де Рама

3.2.1 Определение и гомотопическая инвариантность

Определение 3.2.1. *Пусть $\mathcal{Z}^k(M)$ — линейное пространство замкнутых форм порядка k на многообразии M, а $\mathcal{B}^k(M)$ — пространство точных форм. Тогда фактор-пространство $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M) = \mathcal{Z}^k(M)/\mathcal{B}^k(M)$ называют k-ой группой когомологий де Рама.*

Замечание 3.2.2. *Теорема Пуанкаре 1.2.1 гласит, что $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(U) = \{0\}$, если $U \subset \mathbb{R}^d$ — звёздная область. В то же время, пример 1.2.15 показывает, что $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq \{0\}$.*

Определение 3.2.3. *Если $\omega \in \Omega^k(M)$, то класс эквивалентности $[\omega] \in \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M)$ называют когомологическим классом формы ω. Две формы, принадлежащие одному классу, называют когомологичными.*

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий. Тогда

$$F^*(\mathcal{Z}^p(N)) \subset \mathcal{Z}^p(M) \quad \text{и} \quad F^*(\mathcal{B}^p(N)) \subset \mathcal{B}^p(M). \tag{3.2.1}$$

Поэтому отображение F^* корректно поднимается до отображения из $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(N)$ в $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)$. Кроме того, нетрудно видеть, что $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ и звёздочка тождественного отображения — тождественное отображение. Иными словами, отображение $M \mapsto \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)$ — контрвариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных пространств.

Напомним, что топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют такие непрерывные отображения $F\colon X \to Y$ и $G\colon Y \to X$, что $F \circ G$ и $G \circ F$ гомотопны тождественным отображениям на Y и X, соответственно.

Теорема 3.2.1. *Если гладкие многообразия M и N гомотопически эквивалентны, то для всякого $p \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$ справедливо соотношение $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(N)$, изоморфизм осуществляется отображением F^* (где F и G — пара отображений из определения гомотопической эквивалентности).*

Замечание 3.2.4. *В частности, группы когомологий — топологические инварианты гладких многообразий.*

Идея доказательства состоит в том, что если отображения $F_1, F_2\colon M \to N$ гомотопны, то F_1^* и F_2^* одинаковы как отображения между группами когомологий. Чтобы это доказать, достаточно, в свою очередь, для всякой формы $\omega \in \mathcal{Z}^p(N)$ предъявить такую форму $h\omega \in \Omega^{p-1}(M)$, что $F^*\omega - G^*\omega = d(h\omega)$. Мы построим более общий линейный сплетающий оператор $h\colon \Omega^p(N) \to \Omega^{p-1}(M)$, удовлетворяющий свойству

$$F^*\omega - G^*\omega = d(h\omega) - h(d\omega). \tag{3.2.2}$$

На самом деле, это набор операторов, но обычно принято обозначать их одним символом и не подчёркивать зависимость от p. Начнём построение с важного частного случая. Отметим, что аналогичную конструкцию мы уже использовали в доказательстве теоремы Пуанкаре 1.2.1[1].

Лемма 3.2.5. *Пусть $i_0\colon M \to M \times \{0\}$ и $i_1\colon M \to M \times \{1\}$ — естественные операторы вложения многообразия M в $M \times \mathbb{R}$. Для таких двух отображений существует линейный сплетающий оператор.*

Доказательство. Переходя к картам, нетрудно видеть, что любая форма $\omega \in \Omega^p(M \times \mathbb{R})$ может быть единственным образом представлена в виде

$$\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2, \quad \omega_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega^{p-1}(M)),\ \omega_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega^p(M)). \tag{3.2.3}$$

Поясним последние обозначения: мы понимаем ω_1 и ω_2 как гладкие отображения прямой в линейные пространства $\Omega^{p-1}(M)$ и $\Omega^p(M)$, соответственно. Положим, как и в доказательстве теоремы 1.2.1,

$$h[\omega] = (-1)^{p-1} \int\limits_0^1 \omega_1(s)\, ds. \tag{3.2.4}$$

Требуется проверить свойство (3.2.2). Для форм вида $\omega(t) = \omega_1(t) \wedge dt$ его левая часть обнуляется (это наш любимый пример 1.2.8), а выражения в правой части преобразуются в

$$d(h[\omega]) = (-1)^{p-1} d \int\limits_0^1 \omega_1(s)\, ds = (-1)^{p-1} \int\limits_0^1 d\omega_1(s)\, ds; \tag{3.2.5}$$

$$h[d\omega] = h[d\omega_1(t) \wedge dt] = (-1)^{p-1} \int_0^1 d\omega_1(s)\, ds. \tag{3.2.6}$$

Для форм вида $\omega = \omega_2(t)$ имеем $i_1^*\omega = \omega_2(1)$, $i_0^*\omega = \omega_2(0)$, $dh[\omega] = 0$. Кроме того,

$$h[d\omega] = h\Big[(-1)^p \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \wedge dt\Big] = (-1)^{2p-1} \int\limits_0^1 \frac{\partial \omega_2}{\partial t}(s)\, ds = -(\omega_2(1) - \omega_2(0)). \tag{3.2.7}$$

□

[1] Теорема Пуанкаре, конечно же, следует из теоремы 3.2.1.

Лемма 3.2.6. *Пусть M и N — гладкие многообразия (возможно, с краем), а $F, G\colon M \to N$ — гомотопные гладкие отображения. Отображения F^* и G^* пространства $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(N)$ в $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $H\colon M \times I \to N$ — осуществляющее гомотопию отображение. Согласно теореме 3.1.1, можем, не умаляя общности, считать, что отображение H — гладкое. В таком случае, $F = H \circ i_0$, $G = H \circ i_1$ и поэтому

$$F^* = (H \circ i_0)^* = i_0^* \circ H^* \overset{\text{Лем. 3.2.5}}{=} i_1^* \circ H^* = (H \circ i_1)^* = G^* \tag{3.2.8}$$

как отображения когомологий. □

Доказательство теоремы 3.2.1. Пусть F и G — отображения M в N и N в M, соответственно, осуществляющие гомотопическую эквивалентность. Согласно теореме Уитни о приближении, можем, не умаляя общности, считать их гладкими. Из леммы 3.2.6 следует, что отображения F^* и G^*, как отображения между группами когомологий, взаимно обратны, и поэтому осуществляют изоморфизм. □

Следствие 3.2.7. *Когомологии де Рама — топологический инвариант гладких многообразий.*

Следствие 3.2.8. *Если M — стягиваемое многообразие, то $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$ для всякого $p \geqslant 1$.*

Теорема Пуанкаре 1.2.1 является частным случаем последнего следствия.

Следствие 3.2.9. *Для всяких чисел $d \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$ имеем $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^d) = \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^d_+) = \{0\}$.*

Замечание 3.2.10. *Если многообразие M связно, то $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(M) = \mathbb{R}$, потому что точных форм степени 0 не бывает, а замкнутые соответствуют постоянным функциям.*

Замечание 3.2.11. *Рассмотрим дизъюнктное объединение двух многообразий M_1 и M_2, $M_1 \sqcup M_2$. Нетрудно видеть, что*

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M_1 \sqcup M_2) = \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M_1) \oplus \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M_2). \tag{3.2.9}$$

3.2.2 Связь $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}$ с фундаментальной группой

Зафиксируем точку $q \in M$ и рассмотрим выражение $\Phi(\omega, \gamma) = \int_\gamma \omega$, где γ — гладкая петля с началом в точке q, а $\omega \in \Omega^1(M)$. Согласно теореме 3.1.2, если форма ω замкнута, то значение отображения $\Phi(\omega, \cdot\,)$ не меняется при замене петли γ на гомотопную. С другой стороны, если формы ω_1 и ω_2 гомологичны, то $\Phi(\omega_1, \gamma) = \Phi(\omega_2, \gamma)$, так как $\int_\gamma df = f(q) - f(q) = 0$. Следовательно, отображение

$$\Phi\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) \times \pi_1(M, q) \to \mathbb{R} \tag{3.2.10}$$

корректно определено. Это отображение линейно по первой координате и является групповым гомоморфизмом по второй. Его можно интерпретировать как линейное отображение пространства $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M)$ в $\mathrm{Hom}(\pi_1(M, q) \to \mathbb{R})$, где второе множество — групповые гомоморфизмы $\pi_1(M, q)$ в $\mathbb{R}$, и это множество снабжено линейной структурой.

Лемма 3.2.12. *Отображение $\Phi\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, q) \to \mathbb{R})$ инъективно.*

Доказательство. Достаточно показать, что если для некоторой формы $\omega \in \Omega^1(M)$ и всякой петли γ справедливо тождество $\Phi(\omega, \gamma) = 0$, то $\omega \sim 0$. В доказательстве теоремы 3.1.2 мы выясняли, что в таком случае функция $f(x) = \int_q^x \omega$ является первообразной формы ω, и поэтому форма ω когомологична нулю. □

Следствие 3.2.13. *Если многообразие M связно, а группа $\pi_1(M)$ конечна, то $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$.*

3.2.3 Теорема Майера–Вьеториса

Пусть U и V — открытые подмножества многообразия M, $M = U \cup V$. Рассмотрим диаграмму, стрелки которой суть тривиальные вложения:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U\cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U\cup V \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} & \Omega^p(U) \arrow[dr, "i^*"] & \\ \Omega^p(U\cup V) \arrow[ur, "k^*"] \arrow[dr, "l^*"'] & & \Omega^p(U\cap V) \\ & \Omega^p(V) \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd} . \tag{3.2.11}$$

Аналогичная второй диаграмма возникает и в соответствующих группах когомологий. Напомним, что последовательность линейных пространств $\{C_n\}_n$, снабжённая семейством операторов $d = \{d_n\}$, $d_n \colon C_n \to C_{n+1}$, называется комплексом, если $\operatorname{Im} d_n \subset \operatorname{Ker} d_{n+1}$. Можно рассмотреть пространства $H^n(C) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$. У последовательности d принято опускать индексы. Последовательность

$$\dots V_{p-1} \xrightarrow{F_{p-1}} V_p \xrightarrow{F_p} V_{p+1} \dots \tag{3.2.12}$$

называется точной, если $\operatorname{Ker} F_p = \operatorname{Im} F_{p-1}$ для всех p.

Лемма 3.2.14. *Последовательность*

$$\{0\} \longrightarrow \Omega^p(U\cup V) \xrightarrow{k^*\oplus l^*} \Omega^p(U)\oplus\Omega^p(V) \xrightarrow{i^*-j^*} \Omega^p(U\cap V) \longrightarrow \{0\} \tag{3.2.13}$$

точна.

Доказательство. Точность в $\Omega^p(U\cup V)$ равносильна инъективности $k^*\oplus l^*$, что очевидно. Точность в $\Omega^p(U)\oplus\Omega^p(V)$ следует из явного описания образа оператора $k^*\oplus l^*$:

$$\operatorname{Im}(k^*\oplus l^*) = \Big\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^p(U)\oplus\Omega^p(V) \,\Big|\, \omega_1=\omega_2 \text{ на } U\cap V\Big\} = \operatorname{Ker}(i^*-j^*). \tag{3.2.14}$$

Точность в $\Omega^p(U\cap V)$ равносильна сюръективности отображения i^*-j^*. Чтобы её доказать, нужно любую форму $\omega\in\Omega^p(U\cap V)$ представить в виде

$$\omega = \eta_U|_{U\cap V} - \eta_V|_{U\cap V}, \quad \text{где} \quad \eta_U\in\Omega^p(U),\ \eta_V\in\Omega^p(V). \tag{3.2.15}$$

Пусть $\{\varphi_U,\varphi_V\}$ — разбиение едининцы, подчинённое покрытию U, V. Положим

$$\eta_U = \begin{cases} 0, & U\setminus V; \\ \omega\varphi_V, & U\cap V \end{cases} ; \qquad \eta_V = \begin{cases} 0, & V\setminus U; \\ -\omega\varphi_U, & U\cap V \end{cases} . \tag{3.2.16}$$

Нетрудно видеть, что получились формы на U и V, соответственно, причём они гладкие. На множестве $U\cap V$ справедливо тождество

$$\eta_U - \eta_V = \omega\varphi_V + \omega\varphi_U = \omega. \tag{3.2.17}$$

□

Для дальнейшего нам понадобится лемма из гомологической алгебры.

Лемма 3.2.15 (Лемма о зигзаге). *Пусть A, B, C — такие комплексы линейных пространств, что последовательность*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C \longrightarrow \{0\} \tag{3.2.18}$$

точна, то есть, F и G — последовательности таких операторов, что диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{F_n} & B_n & \xrightarrow{G_n} & C_n & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \big\downarrow d_n^A & & \big\downarrow d_n^B & & \big\downarrow d_n^C & & \\ \{0\} & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{F_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{G_{n+1}} & C_{n+1} & \longrightarrow & \{0\} \end{array} \tag{3.2.19}$$

коммутативны и точны все последовательности

$$\{0\} \longrightarrow A_n \xrightarrow{F_n} B_n \xrightarrow{G_n} C_n \longrightarrow \{0\}. \tag{3.2.20}$$

Существуют такие линейные операторы $\delta_n \colon H^n(C) \to H^{n+1}(A)$, что последовательность

$$\ldots \xrightarrow{F_n} H^n(B) \xrightarrow{G_n} H^n(C) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{F_{n+1}} H^{n+1}(B) \xrightarrow{G_{n+1}} H^{n+1}(C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \ldots \tag{3.2.21}$$

точна.

Следующая теорема доказывается совмещением лемм 3.2.14 и 3.2.15

Теорема 3.2.2 (Теорема Майера–Вьеториса). *Существует такое линейное отображение*

$$\delta \colon \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M), \tag{3.2.22}$$

что последовательность

$$\ldots \xrightarrow{i^*-j^*} \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U \sqcup V) \xrightarrow{i^*-j^*} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \ldots \tag{3.2.23}$$

точна.

7.11.2024

3.2.4 Когомологии сфер

Теорема 3.2.3. *Справедливо тождество*

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = n \text{ или } p = 0; \\ \{0\}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.2.24}$$

Доказательство. Случай $p = 0$ был рассмотрен в замечании 3.2.10. Рассмотрим случай $n = 1$ и $p = 1$. Теорема 3.2.1 и пример 1.2.15 показывают, что $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \neq \{0\}$. С другой стороны, лемма 3.2.12 строит инъективное отображение этой группы в $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$.

В остальных случаях при $p = 1$ сфера односвязна, и поэтому, согласно следствию 3.1.1, имеем $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(S^n) = \{0\}$ при $n \geqslant 2$.

Рассмотрение остальных случаев будет опираться на теорему 3.2.2. Пусть U — сфера S^n с выколотым северным полюсом, а V — сфера S^n с выколотым южным полюсом. Тогда множества U

и V стягиваемы, и все их когомологии, кроме нулевых, равны нулю. Получится точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "i^*-j^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^{p}_{\mathrm{dR}}(S^n) \arrow[r, "k^*\oplus l^*"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U)\oplus \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(V) & & & \mathrm{H}^{p}_{\mathrm{dR}}(U)\oplus \mathrm{H}^{p}_{\mathrm{dR}}(V)
\end{tikzcd}, \tag{3.2.25}$$

что означает равенство $\mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(S^{n-1}) \cong \mathrm{H}^{p}_{\mathrm{dR}}(S^n)$, ведь сфера без двух полюсов $U\cap V$ гомотопически эквивалентна экватору S^{n-1}. Следовательно, если $p=n$, пользуясь много раз этим равенством, получим $\mathrm{H}^{n}_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong \mathrm{H}^{1}_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\mathbb{R}$, а если $p<n$, то $\mathrm{H}^{p}_{\mathrm{dR}}(S^n)\cong \mathrm{H}^{1}_{\mathrm{dR}}(S^{n-p+1})\cong\{0\}$. □

Замечание 3.2.16. *Форма $\omega\in\mathcal{Z}^{d-1}(S^{d-1})$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^{d-1}}\omega=0$. Необходимость этого условия выводится из следствия* 2.2.24. *Так как это условие задаёт подпространство коразмерности один в $\mathcal{Z}^{d-1}(S^{d-1})$ и $\mathcal{Z}^{d-1}(S^{d-1})/\mathcal{B}^{d-1}(S^{d-1})=\mathrm{H}^{d-1}_{\mathrm{dR}}(S^{d-1})$ — одномерное пространство, условие является и достаточным. Аналогичный факт верен и для форм степени $d-1$ на области $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$: чтобы форма была точной, необходимо и достаточно, чтобы её интеграл по любой (или какой-либо) сфере, окружающей начало координат, был равен нулю.*

Упражнение 3.2.17. *Вычислите группы когомологий тора $\mathbb{T}^2=S^1\times S^1$ (произведение двух окружностей).*

Следствие 3.2.18. *Проколотые евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны.*

Следствие 3.2.19. *Евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны.*

Следствие 3.2.20. *Гладкие многообразия различных размерностей не гомеоморфны.*

3.2.5 Когомологии де Рама с компактным носителем

Лемма 3.2.21 (Лемма Пуанкаре для форм с компактным носителем)**.** *Пусть $d\geqslant p\geqslant 1$, ω — замкнутая p-форма в $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем. В случае $p=d$ также предположим, что $\int_{\mathbb{R}^d}\omega=0$. Существует такая $(p-1)$-форма η с компактным носителем, что $d\eta=\omega$.*

Доказательство. Доказательство разбивается на несколько случаев. Не умаляя общности, будем считать, что $\operatorname{supp}\omega\subset B_1(0)$.

Случай $p=1$**.** Пусть сначала $d=1$. Тогда $\omega=f(x)\,dx$. Положим $\eta(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)\,dy$. Условие $\int\omega=0$ как раз и обеспечивает компактность носителя построенной функции.

Если $d>1$, то по классической теореме Пуанкаре (теорема 1.2.1), найдётся такая функция $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, что $df=\omega$. Функция f в таком случае постоянна на множестве $\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_1(0)}$ и равна некоторому числу c. Положим $\eta=f-c$.

Случай $2\leqslant p<d$**.** Пользуясь теоремой Пуанкаре, найдём такую форму $\zeta\in\Omega^{p-1}(\mathbb{R}^d)$, что $d\zeta=\omega$. Пусть φ — гладкий спуск с множества $B_1(0)$ на $\mathbb{R}^d\setminus B_2(0)$. Так как $\mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_1(0)})\cong\{0\}$ (в силу теоремы 3.2.3 и гомотопической эквивалентности указанного пространства сфере S^{d-1}), существует такая форма $\gamma\in\Omega^{p-2}(\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_1(0)})$, что $d\gamma=\zeta$ на этой области. Положим

$$\eta=\zeta-d\big((1-\varphi)\gamma\big). \tag{3.2.26}$$

Это гладкая форма с компактным носителем и $d\eta=d\zeta=\omega$.

Случай $p = d$**.** В этом случае $\mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_1(0)}) \neq \{0\}$ и напрямик форму γ не построить. Для её существования нужно проверить условие $\int_{\partial B_2(0)} \zeta = 0$, выполнение которого мы предполагали:

$$\int\limits_{\partial B_2(0)} \zeta = \int\limits_{B_2(0)} \omega = 0. \tag{3.2.27}$$

□

Замечание 3.2.22. *Из доказательства следует, что верно чуть больше: для всякой окрестности носителя формы* ω *можно построить такую форму* η*, что* $\operatorname{supp} \eta$ *лежит внутри этой окрестности.*

Определение 3.2.23. *Определим пространства*

$$\mathcal{Z}^p_{\mathrm{c}} = \Big\{\omega \in \Omega^p(M) \,\Big|\, d\omega = 0 \text{ и носитель формы } \omega \text{ компактен}\Big\}, \tag{3.2.28}$$

$$\mathcal{B}^p_{\mathrm{c}} = \Big\{\omega \in \Omega^p(M) \,\Big|\, \exists \eta \in \Omega^{p-1}(M) \quad d\eta = \omega \text{ и носитель формы } \eta \text{ компактен}\Big\}; \tag{3.2.29}$$

а также соответствующую группу когомологий с компактным носителем

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR,c}}(M) = \mathcal{Z}^p_{\mathrm{c}}(M)/\mathcal{B}^p_{\mathrm{c}}(M). \tag{3.2.30}$$

Предложение 3.2.24. *Справедливо тождество*

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR,c}}(\mathbb{R}^d) \cong \begin{cases} \{0\}, & p \neq d; \\ \mathbb{R}, & p = d. \end{cases} \tag{3.2.31}$$

Если многообразие M компактно, то группы $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)$ и $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR,c}}(M)$ совпадают. Отметим, что не всякое гладкое отображение пересаживает формы с компактным носителем в формы с компактным носителем. Нужно работать лишь с собственными отображениями (то есть, теми, у которых прообразы компактных множеств компактны). Для таких отображений пересадка индуцирует отображение когомологий с компактным носителем.

Пока что будем предполагать, что многообразие M ориентированно. В таком случае, на пространстве $\Omega^d_{\mathrm{c}}(M)$ можно рассмотреть линейный функционал $\mathrm{I}\colon \Omega^d_{\mathrm{c}}(M) \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{I}[\omega] = \int\limits_M \omega. \tag{3.2.32}$$

Согласно формуле Стокса (следствию 2.2.24), $\mathrm{I}|_{\mathcal{B}^d_{\mathrm{c}}(M)} = 0$, и поэтому I можно рассматривать как функционал на пространстве $\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR,c}}(M)$.

Теорема 3.2.4. *Пусть* M *— связное ориентированное многообразие. Отображение* $\mathrm{I}\colon \mathrm{H}^d_{\mathrm{dR,c}}(M) \to \mathbb{R}$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Требуется доказать, что для всякой d-формы ω с нулевым интегралом и компактным носителем найдётся такая $(d-1)$-форма η с компактным носителем, что $d\eta = \omega$. Пусть $\{U_k\}_k$ — открытое покрытие картами многообразия M; пусть $M_k = \cup_{j \leqslant k} U_j$. Не умаляя общности, будем считать, что $U_{k+1} \cup M_k \neq \varnothing$. Для всякой формы ω её носитель лежит в некотором множестве M_k; будем вести построение формы η индукцией по параметру k.

Случай $k=1$ пересадкой сводится к лемме 3.2.21. Докажем переход $k\to k+1$. Рассмотрим вспомогательную форму $\theta_k\in\Omega^d(M_k\cap U_{k+1})$ с единичным интегралом. Пусть также (φ,ψ) — разбиение единицы на множестве M_{k+1}, подчинённое открытому покрытию $\{M_k,U_{k+1}\}$. Пусть $c=\int\varphi\omega$ и

$$\omega_{\leqslant k}=\varphi\omega-c\theta_k;\quad \omega_{k+1}=\psi\omega+c\theta_k. \tag{3.2.33}$$

В таком случае, формы $\omega_{\leqslant k}\in\Omega^d_{\mathrm{c}}(M_k)$ и $\omega_k\in\Omega^d_{\mathrm{c}}(U_{k+1})$ имеют нулевые интегралы. По предположению индукции, существуют такие формы $\eta_{\leqslant k}\in\Omega^{d-1}_{\mathrm{c}}(M_k)$ и $\eta_k\in\Omega^d_{\mathrm{c}}(U_{k+1})$, что

$$d\eta_{\leqslant k}=\omega_{\leqslant k}\quad\text{и}\quad d\eta_{k+1}=\omega_{k+1}. \tag{3.2.34}$$

Остаётся определить $\eta=\eta_{\leqslant k}+\eta_{k+1}$. Переход доказан. □

Следствие 3.2.25. *Если M — связное ориентируемое компактное многообразие размерности d, то $\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR,c}}(M)\cong\mathbb{R}$.*

Теорема 3.2.5. *Пусть M — связное ориентируемое некомпактное многообразие. Тогда $\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR}}(M)\cong\{0\}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon M\to(0,+\infty)$ — гладкая исчерпывающая функция, то есть, такая, что прообраз всякого компакта компакт. Пусть $U_{\leqslant k}=f^{-1}((0,k))$, $U_k=U_{\leqslant k+2}\setminus\overline{U_k}$ и φ_k — подчинённое покрытию U_k разбиение единицы. Мы хотим для всякой формы $\omega\in\Omega^d(M)$ построить такую форму $\eta\in\Omega^{d-1}(M)$, что $d\eta=\omega$; будем делать это последовательно. Пусть $\theta_k\in\Omega^d(U_k)$ — формы с единичными интегралами. Будем последовательно строить такие формы $\eta_k\in\Omega^{d-1}(U_{\leqslant k})$, что $d\eta_k=\sum_{l\leqslant k}\varphi_l\omega+c_k\theta_k$, где постоянная c_k выбирается таким образом, чтобы у формы в правой части был нулевой интеграл.

Пусть форма η_k уже построена. Согласно лемме 3.2.21, найдётся такая форма $\zeta\in\Omega^{d-1}(U_{k+1})$, что

$$d\zeta=\omega_{k+1}-c_k\theta_k+c_{k+1}\theta_{k+1}, \tag{3.2.35}$$

так как у формы в правой части равенства нулевой интеграл. Остаётся положить $\eta_{k+1}=\eta_k+\zeta$ и перейти к следующему шагу. □

Теорема 3.2.6. *Если M — неориентируемое многообразие размерности d, то $\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR}}(M)=\{0\}$.*

Пусть $(\hat M,\pi)$ — ориентирующее накрытие M; если M неориентируемо, то $\hat M$ — связное многообразие. Пусть также α — единственный нетривиальный автоморфизм этого накрытия, то есть, такой диффеоморфизм $\alpha\colon\hat M\to\hat M$, что $\pi\circ\alpha=\pi$ и $\pi\circ\alpha^{-1}=\pi$.

Лемма 3.2.26. *Справедливо соотношение*

$$\Big\{\eta\in\Omega^p(\hat M)\;\Big|\;\exists\,\omega\in\Omega^p(M)\quad\pi^*\omega=\eta\Big\}=\Big\{\eta\in\Omega^p(\hat M)\;\Big|\;\alpha^*\eta=\eta\Big\}. \tag{3.2.36}$$

Доказательство леммы осуществляется аккуратной работой в картах. Рассмотрим отображения

$$\pi^*\colon\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)\to\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(\hat M);\quad \pi^*\colon\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR,c}}(M)\to\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR,c}}(\hat M) \tag{3.2.37}$$

Лемма 3.2.27. *Отображение π^* инъективно как в случае когомологий с компактным носителем, так и в классическом случае.*

Доказательство. Пусть $\omega\in\mathcal{Z}^p(M)$ и так вышло, что $\pi^*\omega=d\eta$, $\eta\in\Omega^{p-1}(\hat M)$. Нужно найти такую форму $\zeta\in\Omega^{p-1}(M)$, что $d\zeta=\omega$. По лемме 3.2.26, существует такая форма $\zeta\in\Omega^{p-1}(M)$, что $\pi^*\zeta=1/2(\eta+\alpha^*\eta)$ и поэтому $\pi^*d\zeta=\pi^*\omega$, откуда следует желаемое равенство $d\zeta=\omega$.

Приведённое рассуждение работает и для форм с компактным носителем, потому что отображение α собственное. □

Доказательство теоремы 3.2.6. Нужно аккуратно рассмотреть несколько случаев. Если многообразие M некомпактно и мы работаем с некомпактными когомологиями, то результат следует из теоремы 3.2.5.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Ввиду леммы 3.2.27, достаточно доказать, что для всякой формы $\omega \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}^d(M)$ форма $\pi^*\omega$ когомологична нулю. Для этого нужно проверить тождество

$$\int\limits_{\hat{M}} \pi^*\omega = 0. \tag{3.2.38}$$

Отметим, что отображение α изменяет ориентацию многообразия $\hat{M}$, и поэтому $\int_{\hat{M}} \pi^*\omega = -\int_{\hat{M}} \alpha^*\pi^*\omega$. Остаётся заметить, что две интегрируемые формы равны по лемме 3.2.26 $\square$

3.3 Вокруг теоремы де Рама

3.3.1 Обзор сингулярных гомологий

Эта глава носит скорее информационный характер, почти все доказательства в ней пропущены.

Определение 3.3.1. *Пусть M — топологическое пространство, Δ_p — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^p$, то есть, выпуклая оболочка векторов $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_p$; здесь $e_0 = 0$. Непрерывное отображение $\sigma\colon \Delta_p \to M$ называется сингулярным симплексом. Сингулярной цепью ранга p назовём элемент сводобной абелевой группы над множеством сингулярных симплексов, соответствующую группу обозначим символом $C_p(M)$.*

Определим на множестве сингулярных симплексов отображение границы:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}, \tag{3.3.1}$$

где отображение $F_{i,p}\colon \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ — единственное аффинное отображение $\mathbb{R}^{p-1}$ в $\mathbb{R}^p$, оставляющее векторы $e_0, e_1, \ldots, e_{i-1}$ на месте, а у векторов $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{p-1}$ повышающее индекс на единицу, то есть, переводящее их в векторы $e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_p$, соответственно. Отображение ∂ естественным образом продолжается на множество $C_p(M)$.

Лемма 3.3.2. *Справедливо тождество $\partial \circ \partial = 0$.*

Определение 3.3.3. *Элемент c пространства $C_p(M)$ назовём циклом, если $\partial c = 0$ и границей, если $c = \partial b$ для некоторой цепи $b \in C_{p-1}(M)$. Множество циклов обозначим символом $\mathcal{Z}_p(M)$, а множество границ — $\mathcal{B}_p(M)$.*

Определение 3.3.4. *Группой сингулярных гомологий $\mathrm{H}_p(M)$ назовём фактор-группу $\mathcal{Z}_p(M)/\mathcal{B}_p(M)$.*

Циклы одинаковой размерности называют гомологичными, если они отличаются на границу.

Предложение 3.3.5. *Любое непрерывное отображение $F\colon M \to N$ индуцирует отображение цепей $F_\#\colon C_p(M) \to C_p(N)$ композицией: $F_\# c = F \circ c$, $c \in C_p(M)$. Отображение $F_\#$ коммутирует с оператором границы и, следовательно, индуцирует отображение $F_\#\colon \mathrm{H}_p(M) \to \mathrm{H}_p(N)$.*

Пример 3.3.6. *Пусть $M = \{q\}$ — одноточечное пространство. Тогда $\mathrm{H}_p(M) = \{0\}$, если $p \geqslant 1$ и $\mathrm{H}_0(M) = \mathbb{Z}$.*

Нетрудно также видеть, что $\mathrm{H}_p(M_1 \sqcup M_2) = \mathrm{H}_p(M_1) \oplus \mathrm{H}_p(M_2)$.

Предложение 3.3.7. *Гомотопные отображения индуцируют одно и то же отображение гомологий.*

Для доказательства этого предложения, как и раньше, требуется построить сплетающее отображение $h\colon C_p(M) \to C_{p+1}(M \times I)$, обладающее свойством

$$h \circ \partial + \partial \circ h = (i_1)_\# - (i_0)_\#, \tag{3.3.2}$$

после чего доказательство становится аналогично доказательству леммы Пуанкаре. Подробности построения отображения приводить не будем.

Следствие 3.3.8. *Группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств естественным образом изоморфны.*

Для сингулярных гомологий справедлива и теорема Майера–Вьеториса. Теперь у нас есть коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{H}^p(U) \arrow[dr, "k_*"] & \\ \mathrm{H}^p(U \cap V) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \mathrm{H}^p(U \cup V) \\ & \mathrm{H}^p(V) \arrow[ur, "l_*"'] & \end{tikzcd} . \tag{3.3.3}$$

Теорема 3.3.1. *Для всякого числа $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует такое отображение $\partial_*\colon \mathrm{H}_p(U \cup V) \to \mathrm{H}_{p-1}(U \cap V)$, что последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \mathrm{H}_p(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, -j_*)} \mathrm{H}_p(U) \oplus \mathrm{H}_p(V) \xrightarrow{k^* + l^*} \mathrm{H}_p(U \cup V) \xrightarrow{\partial_*} \ldots \tag{3.3.4}$$

точна.

Доказательство, как и в случае когомологий де Рама, основано на лемме о зигзаге и точности последовательности

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{H}_p(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, -j_*)} \mathrm{H}_p(U) \oplus \mathrm{H}_p(V) \xrightarrow{k_* + l_*} \mathrm{H}_p(U \cup V) \longrightarrow \{0\}. \tag{3.3.5}$$

Определение 3.3.9. *Группой сингулярных когомологий ранга p топологического пространства M назовём линейное пространство групповых гомоморфизмов $\mathrm{H}_p(M)$ в $\mathbb{R}$ с поточечным сложением и умножением на скаляр. Обозначения $\mathrm{H}^p(M) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_p(M) \to \mathbb{R})$.*

Любое непрерывное отображение $F\colon M \to N$ индуцирует линейное отображение $F^\#\colon \mathrm{H}^p(N) \to \mathrm{H}^p(M)$ по правилу

$$\mathcal{F}^\#[\gamma](c) = \gamma[F_\#(c)], \quad \gamma \in \mathrm{H}^p(N),\ c \in \mathrm{H}_p(M). \tag{3.3.6}$$

Основываясь на примере 3.3.6, получаем $\mathrm{H}^p(\{q\}) = \{0\}$, если $p \geqslant 1$ и $\mathrm{H}^0(\{q\}) = \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\mathrm{H}^p(M_1 \sqcup M_2) = \mathrm{H}^p(M_1) \oplus \mathrm{H}^p(M_2), \tag{3.3.7}$$

и справедлива теорема Майера–Вьеториса, потому что по двойственности точные последовательности переходят в точные.

Пусть теперь M — гладкое многообразие. Сингулярный симплекс $\sigma\colon \Delta_p \to M$ назовём гладким, если σ — гладкое отображение. Можно аналогичным образом определить гладкие сингулярные гомологии и когомологии. Обозначим символом $C_p^\infty(M)$ группу гладких цепей и $i\colon C_p^\infty(M) \to C_p(M)$ — естественное вложение. Понятно, что это вложение коммутирует с оператором границы и поэтому индуцирует отображние $i_*\colon \mathrm{H}_p^\infty(M) \to \mathrm{H}_p(M)$.

Теорема 3.3.2. *Отображение i_* — изоморфизм.*

Доказательство теоремы основано на теоремах Уитни о приближении и сглаживании гомотопий.

3.3.2 Теорема де Рама

Пусть σ — гладкий сингулярный симплекс в многообразии M, $\omega \in \Omega^p(M)$. Определим

$$\int\limits_\sigma \omega = \int\limits_{\Delta_p} \sigma^*\omega, \tag{3.3.8}$$

здесь мы интегрируем по многообразию с углами. По «линейности» можно распространить определение на общность интегрирования формы по цепи той же размерности:

$$\int\limits_c \omega = \sum_j c_j \int\limits_{\sigma_j} \omega, \qquad \text{где } c = \sum_j c_j\sigma_j. \tag{3.3.9}$$

Отметим, что для этого определения ориентация многообразия M не требуется.

Теорема 3.3.3. *Пусть $c \in C_p^\infty(M)$ — гладкая сингулярная цепь ранга p, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Справедлива следующая версия формулы Стокса*:

$$\int\limits_c d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega. \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай цепи, состоящей из одного симплекса c. Левая часть в этом случае преобразуется в

$$\int\limits_c d\omega = \int\limits_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int\limits_{\Delta_p} d(\sigma^*\omega) = \int\limits_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega \tag{3.3.11}$$

по формуле Стокса для многообразий с углами. С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial c} \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int\limits_{\Delta_{p-1}} F_{i,p}^* \circ \sigma^*[\omega], \tag{3.3.12}$$

и нужно проверить лишь согласованность ориентаций. В формуле Стокса ориентация i-го симплекса задаётся внешней нормалью. Если $i > 0$, то это чётность перестановки

$$(-e_i, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p), \tag{3.3.13}$$

то есть, как раз $(-1)^i$. Если же $i = 0$, то знак ориентация грани нормалью — знак перестановки

$$(e_1 + e_2 + \ldots + e_p, e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots, e_p - e_1), \tag{3.3.14}$$

равная единице. □

Определение 3.3.10. *Определим гомоморфизм де Рама* $\mathcal{J}\colon \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{H}^p(M)$ *следующим образом* $\mathcal{J}\omega[C] = \int_{\tilde{c}} \omega$, *где* $\omega \in \mathcal{Z}^p(M)$ *и* $\tilde{c} \in \mathcal{Z}_p(M)$ *— какой-то представитель гомологического класса* c.

Определение корректно благодаря формуле Стокса: определённое отображение действительно не зависит от выбора представителей c и ω в соответствующих гомологических и когомологических классах. 21.11.2024

Теорема 3.3.4 (де Рам)**.** *Отображение* $\mathcal{J}$ *— изоморфизм.*

Доказательству предпошлём вспомогательное утверждение.

Предложение 3.3.11. *Пусть* $F\colon M \to N$ *— гладкое отображение многообразий. В таком случае, диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "\mathcal{J}"] & \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[d, "\mathcal{J}"] \\ \mathrm{H}^p(N) \arrow[r, "F^*"] & \mathrm{H}^p(M) \end{tikzcd} \tag{3.3.15}$$

коммутативна. Более того, операторы δ *и* ∂^* *из теорем Майера–Вьеториса переходят друг в друга в том смысле, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathcal{J}"] & \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U\cup V) \arrow[d, "\mathcal{J}"] \\ \mathrm{H}^p(U\cap V) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{H}^p(U\cup V) \end{tikzcd} \tag{3.3.16}$$

коммутативна.

Доказательство. Докажем сначала первую часть утверждения. Пусть σ — сингулярный p-симплекс в многообразии M, а $\omega \in \Omega^p(N)$. Тогда

$$\int\limits_{\sigma} F^*\omega = \int\limits_{\Delta_p} \sigma^* F^*\omega = \int\limits_{(F\circ\sigma)^*} \omega, \tag{3.3.17}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{J}[F^*\omega](\sigma) = \mathcal{J}[\omega]\big((F\circ\sigma)^*\big) = F^*[\mathcal{J}[\omega]](\sigma) \tag{3.3.18}$$

по определению пересадки гомоморфизмов.

Доказательство второй части опирается на явное описание операторов δ и ∂_* из теорем Майера–Вьеториса. Так как это описание опирается на доказательство леммы о зигзаге, мы не будем приводить его доказательство (это упражнение). Начнём с расшифровки требуемой коммутативности диаграммы. Пусть $\omega \in \mathcal{Z}^{p-1}(U\cap V)$ и $e \in \mathcal{Z}_p(U\cup V)$. Пусть $\sigma \in \mathcal{Z}^p(U\cup V)$ — представитель когомологического класса $\delta[\omega]$, $c \in \mathcal{Z}_{p-1}(U\cap V)$ — представитель гомологического класса $\partial_*[e]$. Коммутативность диаграммы равносильна тождеству

$$\int\limits_{c} \omega = \int\limits_{e} \sigma. \tag{3.3.19}$$

Факт: описание оператора δ. Существуют такие формы $\eta \in \Omega^{p-1}(U)$ и $\eta' \in \Omega^{p-1}(V)$, что $\omega = \eta|_{U\cap V} - \eta'|_{U\cap V}$ и форма σ когомологична форме, равной $d\eta$ на U и $d\eta'$ на V.

Факт: описание оператора ∂_*. Существуют такие цепи $f \in C_{p-1}(U)$ и $f' \in C_{p-1}(V)$, что c гомологична цепи ∂f и $e = f + f'$.

Остаётся записать цепочку равенств, используя формулу Стокса:

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_{\partial f} \omega = \int\limits_{\partial f} \eta - \int\limits_{\partial f} \eta' = \int\limits_{\partial f} \eta + \int\limits_{\partial f'} \eta' = \int\limits_f d\,\eta + \int\limits_{f'} d\,\eta' = \int\limits_f \sigma + \int\limits_{f'} \sigma = \int\limits_e \sigma. \tag{3.3.20}$$

□

Доказательство теоремы де Рама опирается на ещё одну лемму из гомологической алгебры. Доказательство леммы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 3.3.12 (Лемма о пяти гомоморфизмах)**.** *Пусть диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array} \tag{3.3.21}$$

коммутативна и её горизонтальные последовательности точны. Если отображения f_1, f_2, f_4 и f_5 — изоморфизмы, то и f_3 тоже изоморфизм.

Доказательство теоремы 3.3.4. Будем называть многообразие M дР-многообразием, если отображение $\mathcal{J}\colon \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{H}^p(M)$ — изоморфизм при всех $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Благодаря первой части утверждения 3.3.11, свойство быть дР-многообразием сохраняется при диффеоморфизмах.

Открытое покрытие $\{U_j\}_j$ многообразия M назовём дР-покрытием, если все конечные пересечения $U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \ldots \cap U_{j_k}$ — дР-многообразия. Если дР-покрытие образует базу топологии многообразия M, то будем называть его дР-базой. Доказательство теоремы разбивается на пять шагов.

1. Пусть $\{M_j\}_j$ — не более чем счётный набор дР-многообразий одинаковой размерности. Тогда $\sqcup_j M_j$ — тоже дР-многообразие. Это следует из того, что когомологии многообразия $\sqcup_j M_j$ строятся как прямые суммы когомологий слагаемых и оператор де Рама коммутирует с соответствующими изоморфизмами.

2. Открытые выпуклые подмножества евклидовых пространств суть дР многообразия, потому что они гомотопически эквивалентны точке, а для точки когомологии де Рама совпадают с сингулярными.

3. Пусть теперь многообразие M допускает конечное дР-покрытие $U_1, U_2, \ldots, U_k$; покажем, что M — дР-многообразие. Доказательство проведём индукцией по параметру k. База $k = 1$ очевидна.

   Рассмотрим случай $k = 2$. Для удобства переобозначим $U_2 = V$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U) \oplus \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & \mathrm{H}^{p-1}_{\mathrm{dR}}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M) & \xrightarrow{(k^*,l^*)} & \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U) \oplus \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}} \\ \mathrm{H}^{p-1}(U) \oplus \mathrm{H}^{p-1}(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & \mathrm{H}^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\partial^*} & \mathrm{H}^p(M) & \xrightarrow{(k^*,l^*)} & \mathrm{H}^p(U) \oplus \mathrm{H}^p(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & \mathrm{H}^p(U \cap V) \end{array}. \tag{3.3.22}$$

   Горизонтальные стрелки здесь такие же, как и в соответствующей теореме Майера–Вьеториса. Согласно этим теоремам, горизонтальные последовательности точны. Кроме того, по предположениям о том, что покрытие (U, V) обладает свойством дР, первая, вторая, четвёртая и пятая вертикальные стрелки — изоморфизмы. По лемме 3.3.12, третья стрелка — тоже изоморфзим и $M = U \cup V$ — дР-многообразие.

Проведём теперь индукционный переход $k \to k+1$. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}$ — дР-покрытие многообразия M. Тогда покрытие (U, V), где $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_k$ и $V = U_{k+1}$ — тоже дР-покрытие (по предположению индукции, множество $U \cap V = \cup_{j=1}^{k}(U_j \cap U_{k+1})$ — дР-многообразие). Следовательно, по уже рассмотренному случаю $k = 2$, $M = U \cup V$ — тоже дР-многообразие.

4. Докажем, что если многообразие M обладает дР-базой, то оно дР-многообразие. Пусть $f\colon M \to [0, \infty)$ — гладкая исчерпывающая функция, то есть, такая что прообраз всякого отрезка $[0, a]$, $a > 0$, компактен. Положим

$$A_k = f^{-1}\big([k, k+1]\big); \quad \tilde{A}_k = f^{-1}\big([k - 3/2, k + 3/2]\big). \tag{3.3.23}$$

В каждой точке $x \in A_k$ найдётся элемент базы, являющийся дР-многообразием, и лежащий внутри $\tilde{A}_k$. Пусть B_k — конечное объединение таких множеств, покрывающее A_k. По предыдущему пункту, множество B_k — дР многообразие. Отметим, что множества B_k и B_l не пересекаются, если $|k - l| > 1$. Поэтому множества

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{2k} \qquad \text{и} \qquad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{2k-1} \tag{3.3.24}$$

тоже являются дР-многообразиями (потому что они изоморфны дизъюнктным объединениям соответствующих множеств B_n). Пересечение этих двух множеств — множество такого же вида (дизъюнктное объединение конечных объединений множеств базы). Тогда и их объединение, то есть, M — дР-многообразие.

5. Открытые подмножества евклидова пространства обладают базами из шаров — следовательно, они дР-многообразия. Всякое многообразие обладает базой из карт, и поэтому оно тоже дР-многообразие.

□

Отметим, что можно рассмотреть и гомологии де Рама. Для этого нужно определить потоки — линейные непрерывные функционалы на множестве дифференциальных форм, снабжённых правильной топологией, подобно определению обобщённых функций. Отличие этой теории в общей постановке от теории обобщённых функций состоит в следующем: ввиду отсутствия скалярного произведения, нет естественного отождествления дифференциальной формы с потоком (функции сами не задают обобщённые функции каноническим образом), и это накладывает на теорию определённые ограничения. Так или иначе, перейдём к рассмотрению римановых многообразий.

3.4 Теория Ходжа

3.4.1 Оператор Лапласа на римановом многообразии

Пусть теперь M — риманово многообразие, то есть, гладкое многообразие, снабжённое гладкой симметричной всюду положительно определённой билинейной формой g. Если многообразие M ориентированно, то на нём можно ввести форму объёма $\mathrm{d\,vol}$, то есть, такую форму, что для всякого положительно ориентированного ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_d$ касательного пространства $T_x M$ справедливо соотношение $\mathrm{d\,vol}|_x(e_1, e_2, \ldots, e_d) = 1$. Если в некоторых координатах скалярное произведение задаётся формулой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, то

$$\mathrm{d\,vol} = \pm\sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^d, \tag{3.4.1}$$

и знак выбирается исходя из ориентации базиса. Так как теперь касательное пространство оснащено не только ориентацией, но и скалярным произведением, мы можем определить звёздочку Ходжа $\star\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{d-p}(M)$ просто поточечно. В частности, например, справедлив аналог предложения 1.1.28: $\star\star\eta = (-1)^{p(d-p)}\eta$.

Определение 3.4.1. *Пусть M — ориентированное риманово многообразие. Определим скалярное произведение форм $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ с компактным носителем согласно формуле*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L_2(M)} = \int\limits_M \alpha \wedge \star\beta = \int\limits_M \langle \alpha|_x, \beta|_x \rangle \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x), \tag{3.4.2}$$

скалярное произведение форм порождается скалярным произведением в касательном пространстве согласно формуле (1.1.22).

Из рассмотрения в картах следует, что введённая билинейная форма действительно обладает свойством положительности и определяет скалярное произвдение. Пополнение множества гладких k-форм с компактным носителем по соответствующей норме называют пространством $L_2\Lambda^k(M)$.

Определение 3.4.2. *Оператор $\partial\colon \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$, заданный по правилу $\partial = (-1)^{dp+1} \star d \star$ называют кодифференциалом.*

Замечание 3.4.3. *Кодифференциал формально сопряжён дифференциалу в том смысле, что справедлива формула*

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \partial\eta \rangle, \qquad \omega \in \Omega^p(M),\ \eta \in \Omega^{p+1}(M). \tag{3.4.3}$$

Доказательство идентично доказательству предложения 1.2.22.

Определение 3.4.4. *Дифференциальный оператор $\Delta_{\mathrm{H}}\colon \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$, $\Delta_{\mathrm{H}} = d\delta + \delta d$, называют оператором Ходжа–Лапласа.*

Это неотрицательный оператор:

$$\langle \Delta_{\mathrm{H}}\omega, \omega \rangle = \langle d\omega, d\omega \rangle + \langle \partial\omega, \partial\omega \rangle \geqslant 0. \tag{3.4.4}$$

В случае $p = 0$ оператор Ходжа–Лапласа просто равен ∂d. Приведём координатные формулы. 29.11.2024

Предложение 3.4.5. *Пусть $p = 0$, $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Пусть $\{x_i\}_i$ — некоторая система координат, $g = (g_{ij})$ — матрица скалярных произведений, $(g^{ij})_{i,j}$ — обратная к ней матрица. Справедливо равенство*

$$\Delta_{\mathrm{H}} f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\Big(\sum_{i,j} \frac{\partial(g^{ij}\sqrt{\det g}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})}{\partial x_j}\Big). \tag{3.4.5}$$

Доказательство. Пусть ∂_j — образы векторов стандартного базиса в параметризации $(x_j)_j$. В таком случае, $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. Формы dx^j образуют биортогональную к ∂_j систему, поэтому, используя отождествление функционалов и векторов, получаем представление

$$dx^i = \sum_j g^{ij}\partial_j. \tag{3.4.6}$$

В таком случае,

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} g^{ij}\partial_j. \tag{3.4.7}$$

Вычислим оператор ∂, пользуясь двойственностью. Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$ — форма с носителем в выбранной карте, $\omega = \sum_k \omega^k \partial_k$ (мы используем отождествление форм с векторами, заданное скалярным произведением). Тогда

$$\langle d\varphi, \omega \rangle_{L_2} = \int\limits_M \langle d\varphi, \omega \rangle \,\mathrm{d\,vol} = \int\limits_M \langle \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} g^{ij} \partial_j, \sum_k \omega^k \partial_k \rangle \,\mathrm{d\,vol} = \int\limits_M \sum_{i,j,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} g^{ij} g_{jk} \omega^k \,\mathrm{d\,vol} \tag{3.4.8}$$

$$= \int\limits_M \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \omega^i \,\mathrm{d\,vol} = \int\limits_U \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \omega^i \sqrt{\det g}\, dx = -\int\limits_U \varphi \sum_i \frac{\partial(\omega^i \sqrt{\det g})}{\partial x_i}\, dx \tag{3.4.9}$$

$$= -\int\limits_M \varphi \sum_I \frac{\partial(\omega^i \sqrt{\det g})}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d\,vol}}{\sqrt{\det g}}. \tag{3.4.10}$$

Следовательно,

$$\partial \omega = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_I \frac{\partial(\omega^i \sqrt{\det g})}{\partial x_i}. \tag{3.4.11}$$

Подставляя $\omega = d\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} g^{ij} \partial_j$, получаем желаемый ответ. □

Замечание 3.4.6. *С точностью до членов младшего порядка,*

$$\Delta_{\mathrm{H}} \varphi = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}. \tag{3.4.12}$$

Существует несколько различных определений лапласиана на римановом многообразии, но у всех у них такой старший член.

Пример 3.4.7. *Рассмотрим единичную окружность как подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2$ и параметризуем её углом θ. В таком случае, матрица g единичная и $\Delta_{\mathrm{H}} \varphi(\theta) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$.*

Пример 3.4.8. *Параметризуем сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ стандартным образом:*

$$(x, y, z) = \Big(\cos\theta_1, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2\Big), \quad \theta_2 \in [0, 2\pi),\ \theta_1 \in [0, \pi]. \tag{3.4.13}$$

В таком случае, матрица g имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta_1 \end{pmatrix}, \tag{3.4.14}$$

а обратная матрица —

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\theta_1 \end{pmatrix}. \tag{3.4.15}$$

Получается формула

$$\Delta_{S^2} \varphi(\theta) = -\frac{1}{\sin\theta_1} \Big(\frac{\partial\big(\sin\theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}\big)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{\sin\theta_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_2} \Big) = -\frac{1}{\sin\theta_1} \frac{\partial\big(\sin\theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}\big)}{\partial \theta_1} - \frac{1}{\sin^2\theta_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_2^2}. \tag{3.4.16}$$

Это оператор Лапласа–Бельтрами на сфере.

Теорема 3.4.1. *Пусть M — компактное связное ориентированное риманово многообразие, $k \in [0..d]$, d — размерность многообразия M. Собственные функции оператора Δ_{H} образуют ортогональный базис пространства $L_2\Lambda^k(M)$. Каждое число имеет конечную кратность и собственные числа могут сгущаться лишь на бесконечности.*

Теорема 3.4.2 (Разложение Ходжа). *В условиях предыдущей теоремы*

$$\Omega^k(M) = \operatorname{Ker}\Delta_{\mathrm{H}} \oplus \operatorname{Im}\delta \oplus \operatorname{Im} d. \tag{3.4.17}$$

Следствие 3.4.9. *В частности,* $\operatorname{Ker}\Delta_{\mathrm{H}} \cong \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d \cong \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M)$*. В частности, последнее пространство конечномерно.*

Так как любое ориентируемое многообразие можно снабдить римановой структурой, пространства $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M)$ конечномерны и в этом случае. Для доказательства теорем Ходжа нам потребуется аппарат пространств Соболева на римановых многообразиях.

3.4.2 Пространства Соболева и неравенство Гординга

Пусть s — целое неотрицательное число, а V — ограниченная подобласть пространства $\mathbb{R}^d$. Напомним, что норма Соболева $H^s(V)$ задана формулой

$$\|\varphi\|_{H^s(V)} = \sum_{\alpha\colon |\alpha|\leqslant s} \Big\|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial^{|\alpha|} x}\Big\|_{L_2(V)}. \tag{3.4.18}$$

Либо функция φ предполагается гладкой с компактным носителем, либо нужно говорить о принадлежности её обобщённых производных пространству $L_2(V)$.

Мы хотим определить пространства Соболева дифференциальных форм на многообразии M. Нам будет удобно работать с пространствами смешанных форм $\Omega(M) = \oplus_p \Omega^p(M)$ и определить естественным образом действие оператора $D = d + \delta$ на этом пространстве. Нетрудно видеть, что $\Delta_{\mathrm{H}} = D\circ D$. Если M — подобласть пространства $\mathbb{R}^d$, то можно определить пространство $H^s\Lambda(M)$ как просто пространство отображений, принимающих значения в конечномерном пространстве $\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Иными словами, если φ в формуле (3.4.18) — не функция, а отображение со значениями в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^k$, то для определения правой части можно рассмотреть все её функции-координаты φ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, измерить их H^s-нормы согласно формуле (3.4.18), после чего сложить — полученное выражение и будет задавать H^s-норму отображения φ. Вся используемая нами теория пространств гладких функций без изменения распространяется на случай отображений в конечномерное пространство. В дальнейшем мы не будем указывать, работаем ли мы с функциями или с отображениями.

Определение 3.4.10. *Пусть M — компактное риманово многообразие, $(U_j, f_j)_j$ — такое конечное открытое покрытие многообразия M картами, что все множества $f_j(U_j)$ ограничены. Для гладкой смешанной формы $\varphi \in \Omega(M)$, зададим её H^s-норму по правилу*

$$\|\varphi\|_{H^s(M)} = \Big(\sum_j \big\|(f_j^{-1})^*[\varphi\rho_j]\big\|^2_{H^s(U_j)}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4.19}$$

где $\{\rho_j\}_j$ — подчинённое покрытию $\{U_j\}_j$ разбиение единицы.

Замечание 3.4.11. *Определение соболевской нормы не зависит от выбора покрытия $\{U_j\}_j$ и разбиения единицы $\{\rho_j\}_j$ в том смысле, что различные покрытия и разбиения единицы задают эквивалентные нормы. Это следует из того, что операторы умножения на гладкую функцию и гладкой замены переменных непрерывны в соответствующих соболевских нормах. Кроме того, суммирование «по типу» ℓ_2 в формуле* (3.4.19) *можно заменить, например, просто на сумму норм частей формы, и получить эквивалентную норму.*

Пополнение множества $\Omega(M)$ по норме $H^s(M)$ задаёт пространство $H^s(M)$. Следующие две теоремы тоже следуют напрямик из своих классических аналогов для скалярных функций на областях.

Теорема 3.4.3 (Теорема вложения Соболева)**.** *Пусть $k > d/2$. При $s < k - d/2$ вложение $H^k(M) \hookrightarrow C^s(M)$ непрерывно.*

Теорема 3.4.4 (Теорема Реллиха–Кондрашова)**.** *Вложение пространств $H^k(M)$ в $H^{k-1}(M)$ компактно при $k \in \mathbb{N}$.*

Основное свойство оператора D первого порядка — его эллиптичность, выраженная следующей теоремой.

Теорема 3.4.5 (Неравенство Гординга)**.** *Для всякого числа $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\|\omega\|_{H^s} \lesssim \|\omega\|_{H^{s-1}} + \|D\omega\|_{H^{s-1}}. \tag{3.4.20}$$

Поясним обозначения. Обычно значок '$\lesssim$' используется, чтобы не указывать мультипликативную постоянную в неравенстве, значение которой неважно. То есть, запись $A \lesssim B$ означает, что существует такая постоянная C, что $A \leqslant CB$. Обычно, важна универсальность постоянной C, её независимость от некоторых параметров. Например, в теореме Гординга постоянная может зависеть от числа s и многообразия M, но не должна зависеть от выбора конкретной формы ω. Мы выведем неравенство Гординга из аналогичного утверждения для операторов более общего вида на пространстве $\mathbb{R}^d$. Для этого нам придётся ввести дополнительные обозначения.

Пусть E и F — два конечномерных пространства, $\mathcal{L}(E,F)$ — пространство линейных операторов между этими пространствами, $V \subset \mathbb{R}^d$ — область. Будем рассматривать отображения $A\colon V \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(E,F)$ следующего вида:

$$\big(A(x,\xi)\big)_{i,j} = \sum_{\alpha\colon |\alpha| \leqslant m} a_\alpha^{ij}(x)\xi^\alpha, \qquad x \in V, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1,2,\ldots,\dim E, j = 1,2,\ldots,\dim F. \tag{3.4.21}$$

Коэффициенты $a_\alpha^{ij}\colon V \to \mathbb{R}$ предполагаются гладкими функциями. Такой функции можно естественным образом сопоставить дифференциальный оператор $\mathbb{A}$, действующий на E-значные функции области V по правилу

$$\big(\mathbb{A}[u]\big)_j = \sum_i \sum_{\alpha\colon |\alpha| \leqslant m} a_\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^\alpha u_i}{\partial x^\alpha}, \quad j = 1,2,\ldots,\dim F. \tag{3.4.22}$$

Число m обычно называют *порядком* оператора $\mathbb{A}$. Функцию A назовём символом дифференциального оператора A. Всякому дифференциальному оператору можно единственным образом сопоставить символ. Главной (или старшей) частью оператора $\mathbb{A}$ называют дифференциальный оператор $\mathbb{A}^{\mathrm{sen.}}$ с символом

$$A^{\mathrm{sen.}}(x,\xi) = \sum_{\alpha\colon |\alpha| = m} a_\alpha^{ij}(x)\xi^\alpha. \tag{3.4.23}$$

В таком случае, оператор $\mathbb{A}^{\mathrm{jun.}} = \mathbb{A} - \mathbb{A}^{\mathrm{sen.}}$ — дифференциальный оператор меньшего, чем $\mathbb{A}$ порядка.

Например, символ оператора Лапласа — функция $A(x,\xi) = |\xi|^2$. Символ градиента — функция $A\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$, заданная по правилу

$$A(x,\xi) = \Big(\mathbb{R} \ni t \mapsto t\xi \in \mathbb{R}^d\Big). \tag{3.4.24}$$

Символ дивергенции — функция $A\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, заданная по правилу

$$A(x,\xi) = \Big(\mathbb{R}^d \ni \zeta \mapsto \langle\zeta,\xi\rangle \in \mathbb{R}^d\Big). \tag{3.4.25}$$

Упражнение 3.4.12. *Вычислите символ оператора Лапласа–Бельтрами* (3.4.16) *и его главной части как оператора в переменных θ_1, θ_2.*

Замечание 3.4.13. *Символ композиции двух дифференциальных операторов, вообще говоря, не является композицией их символов. Однако такое полезное соотношение справедливо для операторов с постоянными коэффициентами. Кроме того, оно же справедливо для главных частей операторов. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — отображающие E-значные в F-значные и F-значные в G-значные функции, соответственно, дифференциальные операторы, то символ старшей части оператора $\mathbb{B} \circ \mathbb{A}$ равен $B^{\mathrm{sen.}} \circ A^{\mathrm{sen.}}$.*

Определение 3.4.14. *Оператор $\mathbb{A}$ назовём эллиптическим, если для всех $x \in \overline{V}$, $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ линейный оператор $A^{\mathrm{sen.}}(x,\xi) \in \mathcal{L}(E,F)$ инъективен: для всякого вектора $v \in E \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $\|A^{\mathrm{sen.}}(x,\xi)[v]\|_F > 0$.*

Замечание 3.4.15. *Из компактности следует существование такой постоянной c_x (возможно, зависящей от точки x), что*

$$\|A^{\mathrm{sen.}}(x,\xi)v\|_F \geqslant c_x|\xi|^m\|v\|_E. \tag{3.4.26}$$

Пример 3.4.16. *Оператор ∇^m эллиптический. Действительно, его символ — отображение $A\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, (\mathbb{R}^d)^{\otimes m})$, заданное по правилу*

$$A(x,\xi) = \Big(\mathbb{R} \ni t \mapsto t(\xi)^{\otimes m} \in \mathbb{R}^d\Big), \tag{3.4.27}$$

здесь $(\xi)^{\otimes m} = \{\xi^\alpha\}_{|\alpha|=m}$.

Замечание 3.4.17. *Из замечания 3.4.13 следует, что композиция эллиптических операторов — эллиптический оператор.*

Теорема 3.4.6 (Неравенство Гординга для эллиптических операторов)**.** *Пусть $\mathbb{A}$ — эллиптический оператор порядка m на ограниченной подобласти V пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$\|u\|_{H^m} \lesssim \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}, \qquad u \in C_0^\infty(V). \tag{3.4.28}$$

Замечание 3.4.18. *Верно и обратно утверждение: выполнение неравенства (3.4.28) влечёт эллиптичность оператора $\mathbb{A}$.*

Замечание 3.4.19. *Обратная оценка $\|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} \lesssim \|u\|_{H^m}$ получается раскрытием скобок.*

Замечание 3.4.20. *Слагаемое $\|u\|_{H^{m-1}}$ можно заменить на $\|u\|_{L_2}$. Действительно, подметим неравенство*

$$\|u\|_{H^k} \lesssim \|u\|_{H^m}^{k/m}\|u\|_{L_2}^{1-k/m}, \tag{3.4.29}$$

которое можно доказать, воспользовавшись формулой Парсеваля и неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^k}^2 &\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\hat{u}(\xi)\big|^2(1+|\xi|)^{2k}\,d\xi \\ &\lesssim \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\hat{u}(\xi)\big|^2(1+|\xi|)^{2m}\,d\xi\Big)^{k/m}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\hat{u}(\xi)\big|^2\,d\xi\Big)^{1-k/m} \lesssim \|u\|_{H^m}^{2k/m}\|u\|_{L_2}^{2-2k/m}.\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

Из него, в частности, следует оценка

$$\|u\|_{H^k} \lesssim \varepsilon\|u\|_{H^m} + \varepsilon^{-\frac{k}{m-k}}\|u\|_{L_2}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.4.31}$$

Предположим, что неравенство (3.4.28) *справедливо. Тогда, воспользовавшись только что доказанным неравенством с* $\varepsilon = 1/(2C)$, *получаем*

$$\|u\|_{H^m} \leqslant C\Big(\|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}\Big) \leqslant C\|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \frac{1}{2}\|u\|_{H^m} + C'\|u\|_{L_2}, \tag{3.4.32}$$

где C' *— некоторая постоянная. Следовательно,*

$$\|u\|_{H^m} \lesssim \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{L_2}. \tag{3.4.33}$$

Доказательство теоремы 3.4.6. Сначала рассмотрим случай **постоянных коэффициентов** оператора $\mathbb{A}$. Воспользуемся преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}[u]\|^2_{L_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|A(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)\Big|^2\,d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|A^{\text{sen.}}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi) + A^{\text{jun.}}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)\Big|^2\,d\xi \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|A^{\text{sen.}}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)\Big|^2\,d\xi - C\|u\|_{H^m}\|u\|_{H^{m-1}},\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

где C — явно выражаемая через коэффициенты многочлена A постоянная. Оценим снизу старшее слагаемое, пользуясь соображениями эллиптичности (см. замечание 3.4.15):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|A^{\text{sen.}}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)\Big|^2\,d\xi \geqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\hat{u}(\xi)\big|^2|\xi|^{2m}\,d\xi, \tag{3.4.35}$$

где c — некоторая малая постоянная (зависящая лишь от оператора A). Последнее выражение удобно обозначит символом $\|u\|^2_{\dot{H}^m}$ (так называемая однородная соболевская норма), точнее

$$\|u\|_{\dot{H}^m} = \sum_{\alpha\colon |\alpha|=m} \Big\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial^{|\alpha|}x}\Big\|_{L_2(V)} \asymp \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\hat{u}(\xi)\big|^2|\xi|^{2m}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in C_0^\infty(V). \tag{3.4.36}$$

Таким образом (в приводимой цепочке неравенств постоянную C, возможно, надо слегка увеличить),

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}[u]\|^2_{L_2} \geqslant c\|u\|_{\dot{H}^m} - C\|u\|_{H^m}\|u\|_{H^{m-1}} &\geqslant c\|u\|_{\dot{H}^m} - C'(\|u\|_{\dot{H}^m} + \|u\|_{H^{m-1}})\|u\|_{H^{m-1}} \\ &\geqslant c\|u\|^2_{\dot{H}^m} - C'\|u\|_{\dot{H}^m}\|u\|_{H^{m-1}} - C'\|u\|^2_{H^{m-1}}.\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Остаётся отделить слагаемое $\frac{c}{2}\|u\|_{\dot{H}^m}$, а остальное оценить неравенствами вида $ab \leqslant \varepsilon a^2 + 1/\varepsilon b^2$:

$$\|\mathbb{A}[u]\|^2_{L_2} \geqslant \frac{c}{2}\|u\|^2_{\dot{H}^m} - C''\|u\|^2_{H^{m-1}}. \tag{3.4.38}$$

В случае постоянных коэффициентов оператора $\mathbb{A}$ неравенство (3.4.28) доказано.

Перейдём теперь к рассмотрению **случая непостоянных коэффициентов**. Мы применим распространённый приём для работы с уравнениями в частных производных — «заморозку коэффициентов». Пусть пока что **носитель функции** u **лежит в достаточно малой окрестности точки** $x_0 \in \overline{V}$. В этом случае, рассмотрим оператор $\mathbb{A}_{x_0}$ с символом $A_{x_0}(x,\xi) = \sum_{\alpha,i,j} a_\alpha^{ij}(x_0,\xi)\xi^\alpha$. Следовательно,

$$\|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} \geqslant \|\mathbb{A}_{x_0}[u]\|_{L_2} - \|\mathbb{A}_{x_0}[u] - \mathbb{A}[u]\|_{L_2}. \tag{3.4.39}$$

Коэффициенты оператора $\mathbb{A}_{x_0}$ постоянны, он эллиптический, и поэтому для него неравенство (3.4.28) уже доказано:

$$\|\mathbb{A}_{x_0}[u]\|_{L_2} - \|\mathbb{A}_{x_0}[u] - \mathbb{A}[u]\|_{L_2} \geqslant c_0\|u\|_{H^m} - C\|u\|_{H^{m-1}} - \|\mathbb{A}_{x_0}[u] - \mathbb{A}[u]\|_{L_2}. \tag{3.4.40}$$

Последнее же слагаемое можно оценить величиной

$$\sup_{\alpha,i,j} \|a_\alpha^{ij}(x) - a_\alpha^{ij}(x_0)\|_{L_\infty(\operatorname{supp} u)} \|u\|_{H^m}, \tag{3.4.41}$$

что, в свою очередь, оценивается величиной $\frac{c_0}{2}\|u\|_{H^m}$, коль скоро носитель функции u достаточно мал. Следовательно, мы доказали следующий факт: *для всякой точки $x_0 \in \overline{V}$ найдётся такая малая окрестность, что оценка* (3.4.28) *справедлива для всякой функции $u \in C_0^\infty(V)$ с носителем в этой окрестности с равномерной константой.*

Наконец, для рассмотрения **общего случая**, зафиксируем в каждой точке $x \in \overline{V}$ построенную при рассмотрении предыдущего случая окрестность и выберем из них конечное покрытие области V; пусть $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ — подчинённое этому покрытие разбиение единицы. Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m} \leqslant \sum_\alpha \|\varphi_\alpha u\|_{H^m} \lesssim \sum_\alpha \Big(\|\mathbb{A}[\varphi_\alpha u]\|_{L_2} + \|\varphi_\alpha u\|_{H^{m-1}}\Big) \\ \lesssim \Big(\sum_\alpha \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}\Big) \lesssim \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}. \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

Мы воспользовались неравенствами $\|\mathbb{A}[\varphi_\alpha u]\|_{L_2} \lesssim \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}$ и $\|\varphi_\alpha u\|_{H^{m-1}} \lesssim \|u\|_{H^{m-1}}$; второе элементарно, а первое нуждается в небольшом пояснении: расписывая производные произведений, можно получить, что $\mathbb{A}[\varphi_\alpha u] = \varphi_\alpha \mathbb{A}[u] + \mathrm{Er}[u]$, где Er – дифференциальный оператор порядка не выше $m-1$, и поэтому

$$\|\mathbb{A}[\varphi_\alpha u]\|_{L_2} \leqslant \|\varphi_\alpha \mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|\mathrm{Er}[u]\|_{L_2} \lesssim \|\mathbb{A}[u]\|_{L_2} + \|u\|_{H^{m-1}}. \tag{3.4.43}$$

$\square$

Доказательство теоремы 3.4.5. Начнём доказательство теоремы с проверки эллиптичности оператора D как оператора на подобласти V пространства $\mathbb{R}^d$. Символ этого оператора — некоторая функция $a\colon V \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\oplus_k \Lambda^k(\mathbb{R}^d), \oplus_k \Lambda^k(\mathbb{R}^d))$. Причём от первой координаты эта функция не зависит. На базисной форме dx^I, $I \subset [1\,..\,d]$, её действие определено формулой

$$a(\xi)[dx^I] = \sum_{j \notin I} (-1)^{\epsilon(\{j\},I)} \xi_j\, dx^{I\cup\{j\}} + (-1)^{d(k+1)+1+\epsilon(I,\bar{I})} \sum_{j\in I} (-1)^{\epsilon(\{j\},\bar{I})+\epsilon(\bar{I}\cup\{j\}, I\setminus\{j\})} \xi_j dx^{I\setminus\{j\}}, \tag{3.4.44}$$

см. формулы (1.2.47) и (1.2.49). При вычислении действия оператора Лапласа на $\mathbb{R}^d$ мы поняли, что $D^2 = -\Delta$ (этим символом обозначался классический оператор Лапласа, применяемый к дифференциальным формам «покоординатно»), см. теорему 1.2.2. Следовательно,

$$(a(\xi))^2[dx^I] = |\xi|^2 dx^I, \tag{3.4.45}$$

что, в частности, и означает эллиптичность оператора D:

$$|a(\xi)w|^2 = \langle a(\xi)w, a(\xi)w\rangle = \langle (a(\xi))^2 w, w\rangle = \sum_{I \subset [1\,..\,d]^d} |\xi|^2 w_I^2 > 0, \qquad w = \sum_{I\subset[1\,..\,d]^d} w_I\, dx^I \neq 0. \tag{3.4.46}$$

Замечание 3.4.17 и пример 3.4.16 показывают, что оператор $\nabla^m \circ D$ тоже эллиптический.

Теперь приступим, собственно, к доказательству неравенства (3.4.20). Воспользуемся определением нормы в пространстве Соболева на многообразии и теоремой 3.4.16:

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H^s} \lesssim \sum_\alpha \|(f_\alpha^{-1})^*[\omega\rho_\alpha]\|_{H^s(f_\alpha(U_\alpha))} \\ \lesssim \sum_\alpha \Big\|D_{\mathbb{R}^d}\big((f_\alpha^{-1})^*[\omega\rho_\alpha]\big)\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} + \Big\|(f_\alpha^{-1})^*[\omega\rho_\alpha]\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Второе слагаемое оценивается величиной $\|\omega\|_{H^{s-1}}$. Чтобы оценить первую часть, воспользуемся формулами

$$\big(f_\alpha^{-1}\big)^* d\omega = d(f_\alpha^{-1})^*\omega; \tag{3.4.48}$$

$$\big(f_\alpha^{-1}\big)^* \partial\omega = \partial(f_\alpha^{-1})^*\omega + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge \frac{\partial\sqrt{\det g}}{\sqrt{\det g}}. \tag{3.4.49}$$

Доказательство второй формулы аналогично выводу формулы (3.4.11) и оставлено в качестве **упражнения**. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Big\|D_{\mathbb{R}^d}\big((f_\alpha^{-1})^*[\omega\rho_\alpha]\big)\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} &\lesssim \Big\|(f_\alpha^{-1})^*[D(\omega\rho_\alpha)]\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} + \|\omega\|_{H^{s-1}(M)}\\ &\lesssim \Big\|(f_\alpha^{-1})^*[\rho_\alpha D\omega]\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} + \|\omega\|_{H^{s-1}(M)},\end{aligned} \tag{3.4.50}$$

в последнем переходе мы воспользовались соображениями, уже использованными при обосновании оценок (3.4.43). Таким образом,

$$\Big\|D_{\mathbb{R}^d}\big((f_\alpha^{-1})^*[\omega\rho_\alpha]\big)\Big\|_{H^{s-1}(f_\alpha(U_\alpha))} \lesssim \|D\omega\|_{H^{s-1}} + \|\omega\|_{H^{s-1}}. \tag{3.4.51}$$

□

3.4.3 Доказательства теорем Ходжа

12.12.2024

В предыдущем параграфе все неравенства были получены, вообще говоря, для гладких форм и функций. Есть два стандартных пути распространения неравенств на случай негладких форм и функций.

Первый способ — продолжение по непрерывности. Для этого нам понадобится следующий простой факт.

Упражнение 3.4.21. *Гладкие формы плотны в $H^s(M)$ для всякого $s \geqslant 0$.*

В частности, это упражнение вместе с замечанием 3.4.19 позволяют корректно определить действие оператора D на дифференциальные формы класса $H^1(M)$.

Второй способ состоит в определении действия оператора D в обобщённом смысле: будем говорить, что $D\omega = \eta$, где $\omega, \eta \in L_2(M)$, если

$$\int\limits_M \langle \eta, \varphi\rangle \,\mathrm{d\,vol} = -\int\limits_M \langle \omega, D\varphi\rangle \,\mathrm{d\,vol} \tag{3.4.52}$$

для всякой гладкой формы $\varphi \in \Omega(M)$ (напомним, что многообразие M компактно). После чего неравенство Гординга позволяет доказать, что $D\omega \in L_2(M)$ тогда и только тогда, когда $\omega \in H^1(M)$ по следующему плану. Нужно доказать утверждение о приближении, подобное упражнению 3.4.21: если $D\omega = \eta$ в обобщённом смысле и обе эти формы суммируемы с квадратом, то найдётся такая последовательность гладких форм ω_n, что $\omega_n \to \omega$ и $D\omega_n \to \eta$ в пространстве L_2. Далее остаётся воспользоваться следующим принципом: если последовательность форм ω_n сходится в некотором слабом смысле (например, в L_2) к форме ω и нормы $\|\omega_n\|_{H^s}$ равномерно ограничены, то $\omega \in H^s$ (этот факт можно без труда вывести из описания двойственного к H^s пространства).

Следствие 3.4.22 (Лемма Вейля)**.** *Пусть $D\omega = \eta$, $\omega \in H^1(M)$. Если $\eta \in \Omega(M)$ (то есть, эта форма гладкая), то $\omega \in \Omega(M)$.*

Доказательство. Применим неравенство Гординга: $\|\omega\|_{H^2} \lesssim \|\eta\|_{H^1} + \|\omega\|_{H^1}$. Следовательно, $\omega \in H^2$. Применим неравенство Гординга ещё раз:

$$\|\omega\|_{H^3} \lesssim \|\eta\|_{H^2} + \|\omega\|_{H^2}. \tag{3.4.53}$$

Следовательно, $\omega \in H^3$. Продолжая рассуждать в таком же духе, получаем, что $\omega \in H^m$ для всякого натурального числа m. А благодаря теореме вложения Соболева 3.4.3 это означает, что ω — гладкая форма. □

Начнём доказательство теорем 3.4.1 и 3.4.2 с простого факта.

Следствие 3.4.23. *Пространство гармонических форм конечномерно.*

Доказательство. Пусть H — пространство гармонических форм в L_2. Нетрудно видеть, что это замкнутое подпространство по норме L_2. Согласно неравенству Гординга, единичный шар (в норме L_2) пространства H содержится в шаре пространства H^1. Следовательно, по теореме Реллиха–Кондрашова 3.4.4, он компактен в топологии L_2, то есть, в своей внутренней топологии. А любое банахово пространство с таким свойством конечномерно. □

Рассмотрим теперь пространство $H^{\perp}$ в L_2 и покажем, что заданный на его плотном подмножестве оператор D обратим. Так как $H = \operatorname{Ker} D$ и оператор D симметричен (это следует из замечания 3.4.3), $H^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} D}$. Обозначим символом $P_{H^{\perp}}\colon L_2(M) \to H^{\perp}$ — ортогональный проектор на пространство $H^{\perp}$.

Лемма 3.4.24. *Оператор $P_{H^{\perp}}$ отображает гладкие формы в гладкие.*

Доказательство. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ — ортонормированный базис пространства H гармонических форм. Согласно лемме Вейля, эти формы гладкие. В таком случае, оператор $P_{H^{\perp}}$ можно записать в виде

$$P_{H^{\perp}}[\omega] = \omega - \sum_{j=1}^{d} \omega_j \langle \omega, \omega_j \rangle, \tag{3.4.54}$$

и гладкость образа очевидна. □

Следствие 3.4.25. *Множество гладких форм плотно в пространстве $H^{\perp}$.*

Чтобы получить обратимость оператора D, достаточно доказать неравенство

$$\|\omega\|_{L_2} \lesssim \|D\omega\|_{L_2}, \qquad \omega \in H^{\perp} \cap H^1(M). \tag{3.4.55}$$

Это неравенство, вместе с плотностью образа D в пространстве $H^{\perp}$, в частности, означает, что оператор $D^{-1}\colon H^{\perp} \to L_2$ можно естественным образом доопределить по непрерывности.

Лемма 3.4.26. *Справедливо неравенство* (3.4.55).

Доказательство. Предположим противное, что неравенство (3.4.55) неверно. Это значит, что существует такая последовательность элементов $\omega_n \in H^{\perp} \cap H^1(M)$, что $\|\omega_n\|_{L_2} = 1$, но $\|D\omega_n\|_{L_2} \to 0$. В таком случае, по теореме 3.4.5 справедлива и оценка $\|\omega_n\|_{H^1} \lesssim 1$, и поэтому по теореме Реллиха–Кондрашова, последовательность $\{\omega_n\}_n$ предкомпактна в L_2. Не умаляя общности, $\omega_n \to \omega$ в пространстве $L_2(M)$. В таком случае, $\|\omega\|_{L_2} = 1$, $\omega \in H^{\perp}$ и $D\omega = 0$. Противоречие. □

Следовательно, оператор D обладает непрерывным обратным $D^{-1}\colon H^{\perp} \to H^{\perp}$. По неравенству Гординга и теореме Реллиха–Кондрашова, этот оператор компактен. Следовательно, по спектральной теореме, его спектр дискретен, а множество собственных чисел может иметь лишь одну точку сгущения — ноль. Собственные функции оператора D^{-1} образуют ортогональный базис $H^{\perp}$. По лемме Вейля (применённой к оператору $D - \lambda\,\mathrm{id}$) эти функции гладкие, и поэтому являются собственными функциями оператора Δ_{H} в классическом смысле. Это **доказывает теорему 3.4.1**.

Доказательство теоремы 3.4.2. Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$. Теорема утверждает существование и единственность разложения $\omega = \omega_1 + D\omega_2$, где форма ω_1 гармоническая, а ω_2 — форма смешанной степени. Единственность очевидна, так как ядро оператора D (пространство гармонических форм) ортогонально его образу ввиду симметричности оператора D.

Докажем существование. Положим $\omega_1 = P_H\omega$ и заметим, что эта форма гладкая благодаря лемме 3.4.24. Согласно лемме 3.4.26, существует такая форма $\omega_2 \in H^1(M)$, что $\omega - \omega_1 = D\omega_2$. По лемме Вейля, это гладкая форма. Существование доказано. $\square$

Доказательство следствия 3.4.9. Из соотношения $d^* = \partial$ следует, что $\operatorname{Ker} d = (\operatorname{Im}\partial)^\perp$, и поэтому, по теореме 3.4.2,

$$\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Ker} \Delta_{\mathrm{H}}\,. \tag{3.4.56}$$

Остаётся воспользоваться определение пространства $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M)$. $\square$

3.5 Спектр оператора Ходжа–Лапласа и геометрия

Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ — занумерованные с учётом кратности собственные числа оператора Δ_{H} связного ориентированного компактного риманова многообразия M. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — соответствующая им ортонормированная система собственных функций. Какую информацию о многообразии M можно извлечь из набора чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_n$? Вообще говоря, существуют неизометричные (и даже неизоморфные) римановы многообразия с одинаковыми множествами собственных чисел операторов Ходжа–Лапласа. И тем не менее, некоторую информацию о многообразии M множество Λ содержит.

Теорема 3.5.1. *Множество Λ однозначно определяет размерность и объём многообразия M.*

Мы докажем эту теорему, опираясь на свойства уравнения теплопроводности, которые мы примем на веру. Под уравнением теплопроводности на функцию $u\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}$ мы понимаем следующую начально-краевую задачу

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{\mathrm{H}}\Big)u = 0, \qquad u(0,x) = f(x), \quad x \in M. \tag{3.5.1}$$

Оператор Ходжа–Лапласа применяется по переменной x.

Теорема 3.5.2. *Существует такая гладкая функция $e\colon \mathbb{R}_+ \times M \times M \to \mathbb{R}$, что решение начально-краевой задачи* (3.5.1) *задано формулами*

$$u(t,x) = \int\limits_M e(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}\operatorname{vol}(y), \quad f(x) = \lim_{t\to 0} u(t,x), \quad \textit{для почти всех } \ x \in M \tag{3.5.2}$$

для всех функций $f \in L_2(M)$. Кроме того, справедливо асимптотическое соотношение

$$e(t,x,x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} + o(t^{-\frac{d}{2}}), \qquad t \to 0, \ x \in M. \tag{3.5.3}$$

Упражнение 3.5.1. *Предполагая теорему справедливой, докажите формулу*

$$e(t,x,y) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(y), \tag{3.5.4}$$

причём ряд сходится в любом пространстве $H^s(M \times M)$ при фиксированном t.

Теперь доказательство теоремы 3.5.1 не составляет труда:

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \sum_n e^{-\lambda_n t}\|\varphi_n\|^2_{L_2(M)} = \int\limits_M e(t,x,x)\,\mathrm{d}\operatorname{vol}(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \operatorname{vol} M + o(t^{-\frac{d}{2}}). \tag{3.5.5}$$

Литература

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[2] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043

[3] Steven Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian manifold*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, An introduction to analysis on manifolds. MR 1462892

[4] Laurent Schwartz, *Analyse mathématique. I*, Hermann, Paris, 1967. MR 226972

[5] Д. М. Столяров, *Конспект спецкурса по геометрической теории меры*, https://math-cs.spbu.ru/wp-content/uploads/2022/06/GeometricMeasureTheory.pdf.