Образовательная программа “Математика” факультета математики и компьютерных наук СПбГУ

Бакалавриат

https://math-cs.spbu.ru/bsc-math/
https://joinmkn.ru

Дорогие выпускники!

Поздравляю вас с окончанием школы! Позади серьезный этап, и после него жизнь становится более разнообразной, а ритм ускоряется.

В последних классах физ-мат школы у меня было впечатление, что математика — это завершенная наука. Прошло тридцать лет, и как же я тогда заблуждался! В большой математике очень много открытых вопросов и постоянный прогресс: вы, наверное, слышали, что доказали теорему Ферма и гипотезу Пуанкаре. Казалось бы, двумя проблемами меньше, но это, напротив, расширило поле работы: появились новые вопросы, а также новые методы решения, которые можно теперь применять. В математиках вашего поколения нуждаются многие области: астрофизика, биология, машинное обучение. Если вы собираетесь изучать математику, то я поздравляю вас с замечательным выбором, на ваш век точно хватит увлекательных проблем.
Приходите заниматься математикой вместе с нами на факультет МКН СПбГУ!

Станислав Смирнов

Председатель Совета образовательной программы “Математика” МКН СПбГУ

Посмотреть полное видеообращение к абитуриентам можно здесь.

Учебный план бакалавриата “Математика” МКН

1	Алгебра 1	Математический анализ 1	Дискретная математика	Основы наивной теории множеств	Геометрия и топология 1	Алгоритмы 1	История	Иностранный язык	ФК	
2	Алгебра 2	Математический анализ 2	Дискретная теория вероятностей	Математическая логика 1	Геометрия и топология 2	Алгоритмы 2 и 3	ЦК	Иностранный язык	ФК	
3	Алгебра 3	Математический анализ 3	Дифференциальные уравнения и динамические системы 1	Дифференциальная геометрия 1	Теоретическая информатика 1	Философия	Иностранный язык	ЭК		
4	Алгебра 4	Функциональный анализ 1	Математический анализ 4	Вариационное исчисление	Дифференциальные уравнения и динамические системы 2	Дифференциальная геометрия 2	Теоретическая информатика 2	Учебная практика	Иностранный язык	ФГ
5	Функциональный анализ 2	Анализ Фурье	Теория вероятностей	Математическая физика	Дисциплины по выбору	НИР	Учебная практика	ОБ	ОП	
6	Математическая логика 2	Комбинаторика	Математическая физика	Гладкие многообразия	Дисциплины по выбору	Учебная практика	ПК			
7	Анализ на гладких многообразиях	Математическая статистика	Физика	Дисциплины по выбору						
8	Научно-исследовательская работа	Дисциплины по выбору	Защита ВКР							

Навигация и полезные ссылки

Навигация:

- На странице предмета расположены фото преподавателей данного предмета
- Все фотографии преподавателей **кликабельны** — при нажатии осуществляется переход на личную страницу преподавателя
- Все названия курсов **кликабельны**
- Для возвращения на основную страницу нужно нажать на логотип программы в левом верхнем углу

На факультете представлено 8 направлений: Алгебра, Геометрия и тополгия, Дискретная математика и математическая логика, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Математическая физика, Математический анализ, Теоретическая информатика, Теория вероятностей и математическая статистика.

Электронная почта приемной комиссии факультета МКН СПбГУ MaCS@priem.spbu.ru
Группа vk https://vk.com/spbumathcs

Телеграм группа, где общаются абитуриенты, студенты, руководство и сотрудники приёмной комиссии факультета МКН:
https://t.me/mathcs_admission

Математический анализ

Обязательные курсы:

- Математический анализ 1
- Математический анализ 2
- Математический анализ 3
- Математический анализ 4
- Функциональный анализ
- Анализ Фурье
- Анализ на гладких многообразиях

Примеры курсов по выбору:

- Ортогональные многочлены
- Избранные главы теории потенциалов
- Введение в теорию пространств Харди
- Целые функции
- Функции Беллмана
- Дополнительные главы функционального анализа
- Спектральная теория дифференциальных операторов
- Частотно-временной анализ
- Абстрактный гармонический анализ

Математический анализ 1

Размер: 4 часа лекций, 3 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Математический анализ служит основой целого ряда разделов математики, имеющих как чисто теоретическое, так и прикладное значение.

Многие абитуриенты привыкли считать математический анализ первого семестра едва ли не разделом школьной программы. Однако, уже минутное размышление показывает, что даже привычным школьным знаниям необходим прочный научный фундамент. Например, немногие из школьников смогут математически корректно определить число Эйлера $e = 2{,}71\ldots$ так, чтобы этим определением можно было пользоваться для чего-либо, кроме вычисления предела $(1+1/n)^n$. Абитуриент, читающий эти строки, может спросить себя, как такое формально верное определение связано с формулой $e^{i\pi} = -1$ и отношением катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике. В первом семестре вводятся и систематически изучаются основные концепции математического анализа. При этом регулярно используется язык топологии, что прививает математическую культуру и демонстрирует единство различных разделов математики.

Юрий Сергеевич Белов

Сергей Витальевич Кисляков

Необходимые знания:

- Математика на уровне школьной программы

Где понадобится:

Анализ, теория вероятностей, математическая физика, теория чисел, анализ Фурье, дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения, статистика, разнообразные спецкурсы

Вы научитесь:

- вычислять пределы и интегралы
- работать с непрерывными и дифференцируемыми функциями
- доказывать неравенства средствами дифференциального исчисления
- исследовать асимптотическое поведение последовательностей, рядов, решений уравнений

Содержание:

- Вещественные числа, щели, верхние и нижние грани множеств, непрерывность, пределы, начальные сведения о рядах
- Дифференциальное исчисление: теорема Лагранжа, формула Тейлора, выпуклые функции, правило Лопиталя
- Интегральное исчисление: интеграл Римана, формула Ньютона-Лейбница, равномерная сходимость степенные ряды и элементарные функции комплексного аргумента: экспонента, синус, логарифм.
- Некоторые приложения: функции ограниченной вариации, формула Стирлинга, число и длина окружности

Математический анализ 2

Размер: 4 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Все гладкое — в малом линейно. В первом семестре мы уже познакомились с проявлением этого принципа, однако, во втором семестре он получает новое глубокое содержание. Основу курса составляет изучение теории гладких функций нескольких переменных. Появление этой теории связано с необходимостью:

1) решать экстремальные задачи с участием функций нескольких переменных;
2) доказывать существование решений уравнения с несколькими неизвестными и изучать их свойства;
3) иметь математический аппарат для работы с функциями на поверхностях;
4) исследовать зависимость тех или иных объектов от задающих их параметров.

Для решения поставленных задач широко используются следующие инструменты многомерного анализа: многомерная формула Тейлора, теорема об обратном отображении, теорема о неявном отображении, описание экстремумов в терминах дифференциала и Гессиана, метод градиентного спуска, теорема о структуре решения систем уравнений с гладкими коэффициентами. Также в курсе изучаются методы исследования зависящих от параметров величин, естественным образом возникающих в приложениях анализа: общие теоремы о перестановки пределов, производных и интегралов; собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра; Эйлеровы интегралы. методы суммирования рядов, тауберовы теоремы.

Михаил Борисович Дубашинский

Федор Владимирович Петров

Необходимые знания:

- Анализ 1
- Алгебра 1
- Геометрия и топология 1

Где понадобится:

Анализ, теория вероятностей, математическая физика, теория чисел, анализ Фурье, дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения, статистика, разнообразные спецкурсы

Вы научитесь:

- находить локальные экстремумы функций, в том числе условные
- доказывать разрешимость систем уравнений и исследовать их решения
- делать замену переменной в уравнениях с частными производными
- находить касательное пространство к многообразию в заданной точке
- вычислять интегралы с помощью введения параметра

Содержание:

- Многомерный анализ — дифференциальное исчисление функций нескольких вещественных переменных
- Гладко параметризованные многообразия в R^n
- Равномерная сходимость и перестановки предельных переходов
- Суммирование рядов и тауберовы теоремы

Математический анализ 3

Теория меры и интеграла

Размер: 3 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В третьем семестре изучается теория меры и интеграла. Мера есть фундаментальное математическое понятие, глубоко обобщающее понятия длины кривой, площади плоской фигуры, объёма пространственного тела, количества элементов в конечном множестве. Ключевым свойством меры является её счётная аддитивность: мера счётного дизъюнктного объединения множеств равна сумме их мер. Это сильное и очень полезное свойство, но ценой за него является сложность построения меры, даже продолжающей на подходящую систему множеству длину отрезков на прямой (меру Лебега). В курсе изучаются общие основы теории меры, мера Лебега, меры Хаусдорфа. Изучается теория измеримых функций и интеграла Лебега. Завершается семестр изучением теории дифференциальных форм, в том числе интегрирования дифференциальных форм по многообразиям, теоремами Гаусса — Остроградского и Стокса.

Павел Александрович Мозоляко

Юрий Сергеевич Белов

Дмитрий Михайлович Столяров

Необходимые знания:

- Математический анализ 1-2
- Алгебра 1-2
- Геометрия 1-2

Где понадобится:

Математический анализ 4, Анализ Фурье, Функциональный анализ, Теория вероятностей, Математическая физика, Вариационное исчисление и др.

Вы научитесь:

- Свободно обращаться с многомерными и поверхностными интегралами, дифференцировать внешние формы, интегрировать по частям в старшей размерности.

Содержание:

- Полукольца, кольца, сигма-алгебры. Предмера, внешняя мера, продолжение меры по Каратеодори.
- Мера Лебега. Измеримые множества.
- Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона — Никодима. Разложение мер и зарядов.
- Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Лузина и Егорова.
- Интеграл по мере. Основные свойства интеграла. Предельный переход под знаком интеграла. Пространства L^p.
- Мера Хаусдорфа. Интегрирование по многообразиям. Теорема Гаусса — Остроградского.
- Свёртка. Аппроксимация гладкими функциями. Разбиение единицы.

Математический анализ 4

Комплексный анализ

Размер: 3 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Комплексный анализ изучает общие свойства аналитических функций, то есть функций, совпадающих со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения. Многие уже известные нам отображения можно продолжить в комплексную плоскость, при этом наиболее естественное продолжение получается аналитическим, а продолженные функции обладают удивительными свойствами: например, синус перестанет быть ограниченным, а логарифм можно определить для отрицательных вещественных чисел. Так как аналитичность легко проверяется, теоремы комплексного анализа часто применяются в других областях математики: анализе Фурье, теории чисел, спектральной теории, теории операторов, математической физике.

В первой части курса комплексного анализа изучается классическая его ветвь: теорема Коши, принцип аргумента, теорема Руше, принцип максимума, теорема единственности, задача Дирихле для гармонических функций. Уже на этом уровне комплексный анализ находит интересные применения, часть из которых демонстрируется в курсе (основная теорема алгебры, множества единственности для степенных рядов, локализация корней многочленов, вычисление интегралов с помощью вычетов), а часть будет открываться с течением времени в других дисциплинах. Следующая большая тема — теорема Римана об униформизации и начала теории римановых поверхностей. Еще один раздел комплексного анализа — теория целых функций.

Павел Александрович Мозоляко

Ильгиз Рифатович Каюмов

Необходимые знания:

- Математический анализ 1-4
- Геометрия 1-4
- Алгебра 1-2

Где понадобится:

В анализе Фурье, спецкурсах по теории чисел, гильбертовым пространствам аналитических функций, спектральной теории, римановым поверхностям, конформной теории поля, теории потенциала. При использовании комплексного анализа в приложениях, связанных с динамикой жидкостей и газов. При исследовании асимптотического поведения осциллирующих интегралов.

Вы научитесь:

- Вычислять сложные интегралы с помощью теоремы Коши о вычетах
- Оценивать число решений некоторых уравнений
- Раскладывать функции в суммы и произведения дробей, вычислять суммы некоторых бесконечных рядов и произведений
- Восстанавливать гармонические функции по их граничным значениям
- Находить конформные преобразования различных областей на единичный круг
- Применять теоремы комплексного анализа в вещественных задачах

Содержание:

- Точные и замкнутые дифференциальные формы Теорема Коши-Гурса-Морера и ее следствия
- Гармонические функции и задача Дирихле
- Принцип максимума, теорема единственности, теорема Коши о вычетах принцип аргумента, теорема Руше
- Теорема Римана

Функциональный анализ

Размер: 2 часа лекций в неделю
Отчетность: зачет в 4 семестре, экзамен в 5 семестре

Функциональный анализ — это очень важный раздел математики, который играет значительную роль в анализе, дифференциальных уравнениях, в математической и теоретической физике, квантовой механике и во многих других дисциплинах. Функциональный анализ изучает, в основном, линейные операции. Рассмотрим пример линейной операции (оператора), а именно рассмотрим матрицу комплексных чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

как линейный оператор из комплексного n-мерного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$ в m-мерное евклидово пространство $\mathbb{C}^m$. При этом вместо комплексных евклидовых пространств можно рассматривать вещественные. Этот оператор определяется следующим образом. Пусть x— столбец комплексных чисел из n компонент, который мы будем интерпретировать как вектор пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда наш линейный оператор действует следующим образом. Мы применяем его к вектору x и получим вектор y из пространства $\mathbb{C}^m$, который определяется как произведение матрицы A на столбец x, то есть $y = Ax$. Линейность оператора A означает, что $A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Ax_1 + a_2Ax_2$ для произвольных столбцов x_1, x_2 из $\mathbb{C}^n$ и произвольных чисел a_1 и a_2.

Такими матрицами описываются линейные операторы в конечномерных пространствах, и такие объекты изучаются в линейной алгебре. Функциональный анализ в основном изучает линейные операторы в бесконечномерных пространствах. Среди бесконечномерных пространств особую роль играют так называемые банаховы пространства, а среди банаховых пространств выделяют гильбертовы пространства (то есть банаховы пространства со скалярным произведением) как наиболее важные банаховы пространства. При этом линейные операторы предполагаются непрерывными.



Владимир Всеволодович Пеллер

Продолжение аннотации на следующей странице.

Функциональный анализ

Размер: 2 зачетных единицы в 4 семестре и 3 зачетных единицы в 5 семестре, 2 часа лекций в неделю
Отчетность: зачет в 4 семестре, экзамен в 5 семестре

В качестве примеров бесконечномерных банаховых пространств можно рассмотреть пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на промежутке $[a,b]$. А в качестве примера бесконечномерного гильбертова пространства можно рассмотреть пространство последовательностей ℓ^2, которое состоит из *таких* бесконечных последовательностей $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, что $\sum |x_i|^2 < \infty$. При этом скалярное произведение (x, y) последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$ определяется следующим образом: $(x, y) = x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots$, то есть $(x, y) = \sum x_n\overline{y_n}$ здесь для комплексного числа a символ $\overline{a}$ означает комплексное сопряжение числа a. Одним из важнейших понятий в функциональном анализе является понятие спектра линейного оператора, действующего из банахова пространства X в себя. Поясним, что это значит, на примере оператора в конечномерном пространстве, задаваемого *квадратной* матрицей, то есть в правой части равенства (1) предполагается, что $m = n$. Для таких операторов спектр — это множество собственных значений матрицы A (напомним, что комплексное число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A, если существует *такой* ненулевой столбец x, что $Ax = \lambda x$).

Спектр непрерывного линейного оператора в банаховом пространстве — это обобщение понятия спектра оператора в конечномерном пространстве. При этом, в отличие от конечномерного случая, спектр может быть произвольным непустым ограниченным замкнутым подмножеством комплексной плоскости. Вокруг понятия спектра группируются важные результаты функционального анализы, кульминацией которых является так называемая *спектральная теорема*.

Приведём ещё один пример из геометрии, скажем, трёхмерного пространства (размерность пространства здесь несущественна, она может быть любой). Этот пример в функциональном анализе допускает очень глубокое обобщение на случай бесконечномерных пространств. Напомним, что непустое подмножество K трёхмерного евклидова пространства называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой точек x и y оно содержит и все точки, расположенные между x и y. Точка a выпуклого множества K называется *крайней*, если из того, что a находится между точками x и y множества K вытекает, что $x = y$. Хорошо известно, что непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество всегда имеет крайнюю точку. Бесконечномерное обобщение этого факта, теорема Крейна—Мильмана, имеет многочисленные применения за пределами функционального анализа.

Разумеется, функциональный анализ — это обширный и очень важный раздел математики, и в этом кратком введении мы затронули лишь некоторые его аспекты. Есть много других интересных и важных разделов функционального анализа, для ознакомления с которыми необходимы знания за пределами школьной математики.

Анализ Фурье

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет

“Всё на свете состоит из гармоник” — один из принципов анализа Фурье, основная идея которого состоит в том, что свойства сложных объектов могут быть “закодированы” в терминах коэффициентов их разложения на простые слагаемые. Например, классические гармоники — функции $sin(nx)$, $cos(nx)$ — можно использовать при разложении в ряд практически любой 2π-периодической функции на вещественной прямой. Это наблюдение, изначально мотивированное рассмотрением формы колеблющейся струны, привело Фурье к решению задачи о распространении тепла в твердом теле круглой формы (исторически — винной бочке) и открыло эпоху применения анализа Фурье в разнообразных задачах теоретической и прикладной математики.

Курс анализа Фурье строится так, чтобы дать представление о применениях подхода Фурье в самых разных задачах. Класс Шварца и теория распределений позволяет решать дифференциальные уравнения, сводя их к алгебраическим, а также заниматься их обобщенными решениями, когда решений в виде обычных функций нет. Теорема Пэли-Винера описывает функции с компактным спектром Фурье (band limited signals в инженерной литературе), теорема отсчетов Котельникова-Шеннона-Виттакера восстанавливает такие функции по их значениям в целых точкам (“отсчетам”, как их называют в теории обработки сигналов).

Андрей Вячеславович Семенов

Сергей Витальевич Кисляков

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- [Математический анализ 1-4]
- [Функциональный анализ 1]

Где понадобится:

В теории чисел, матфизике, теории обработки и передачи сигналов, эргодической теории. Один из самых применяемых математических курсов в инженерных задачах.

Вы научитесь:

- Раскладывать функции в ряд Фурье
- Решать дифференциальные уравнения методом Лапласа
- Делать качественные заключения о характере функции по ее преобразованию Фурье
- Вычислять асимптотику осциллирующих интегралов
- Применять на практике важные методы и идеи функционального анализа и теории операторов
- Распознавать преобразование Фурье и свертку в различных видах и проявлениях, пользоваться равенством Парсеваля для различных систем

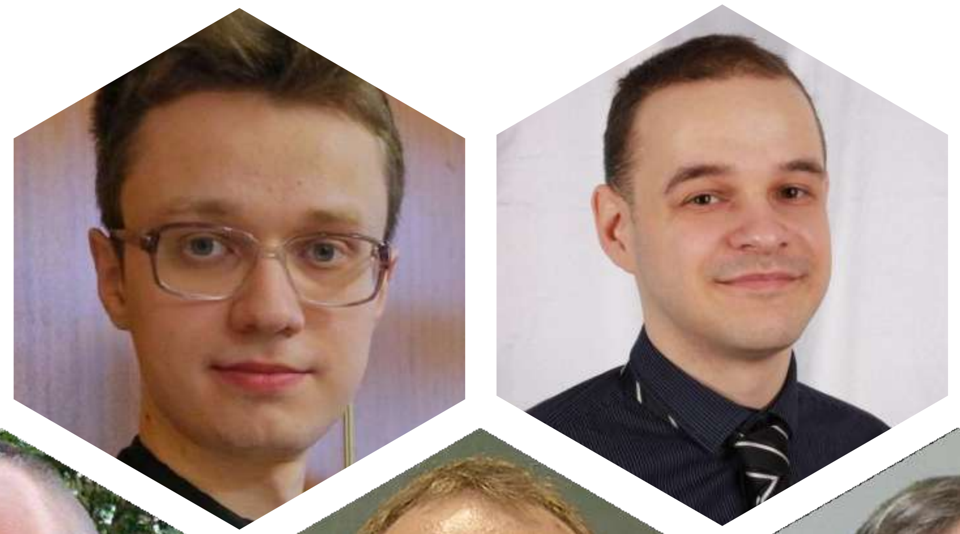
Анализ Фурье

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет

Другое приложение — проблема Гаусса об асимптотическом поведении числа целых точек в круге большого радиуса. Эта задача, как и многие другие проблемы аналитической теории чисел, при всей простоте формулировки остается открытой до сих пор. Ее изящное частичное решение дается средствами анализа Фурье и служит прекрасной иллюстрацией полезности перехода от “пространства времени” к “пространству частот”.

Интересно, что формула суммирования Пуассона, которая при этом используется, также возникает в физически мотивированных вопросах кристаллографии. Например, с помощью нее можно построить квазикристалл — дискретную меру с дискретным спектром Фурье и отсутствием симметрии.

Курс завершается кратким введением в анализ Фурье на локально-компактных абелевых группах, включая построение меры Хаара и частный случай теоремы Петера—Вейля.



Кирилл Сергеевич Рядовкин

Владимир Всеволодович Пеллер

Содержание:

- Преобразование Фурье на классе Шварца
- Преобразование Фурье на классе распределений медленного роста
- Теорема Хёрмандера
- Теорема Пэли–Винера
- Теорема Котельникова-Шеннона-Виттакера Дискретное преобразование Фурье
- Теорема Фейера
- Теорема Харди Формула суммирования Пуассона
- Проблема круга
- Теорема Рисса–Торина
- Мера Хаара
- Преобразование Фурье на локально компактных абелевых группах
- Теорема Петера-Вейля (компактный абелев случай)

Анализ на гладких многообразиях

Размер: 2 часа лекций в неделю
Отчетность: зачет

В курсе комплексного анализа мы узнали, что некоторые интегралы позволяют описывать топологические свойства кривых. Чтобы обобщить эти принципы на многообразия произвольной размерности, необходимо изучить язык дифференциальных форм и освоить теорию их интегрирования. Получающиеся при этом топологические инварианты называются когомологиями де Рама. Курс посвящён построению этой теории и её эквивалентности сингулярным когомологиям. Также мы пройдём теорию Ходжа: в случае ориентированных римановых многообразий группы когомологий связаны с гармоническими формами, обобщениями классических гармонических функций. Мы изучим теорию Ходжа, которая может служить примером применения функционального анализа к топологии.

Дмитрий Михайлович Столяров

Необходимые знания:

- Математический анализ 1-4
- Функциональный анализ
- Гладкие многообразия
- Алгебра 4

Где понадобится:

В современной физике, уравнениях в частных производных, алгебраической топологии

Вы научитесь:

- Языку дифференциальных форм
- Вычислять группы когомологий простых многообразий
- Работе с дифференциальными операторами на многообразиях

Содержание:

- Дифференциальные формы на евклидовых пространствах
- Элементы теории векторных расслоений
- Дифференциальные формы на многообразиях
- Формула Стокса
- Когомологии де Рама
- Теорема де Рама
- Неравенства Гордина
- Теория Ходжа

Алгебра

Обязательные курсы:

- Алгебра 1
- Алгебра 2
- Алгебра 3
- Алгебра 4

Примеры курсов по выбору:

- Теория пересечений
- Инварианты в теории узлов
- Редуктивные группы
- Алгебраическая геометрия
- Алгебры и группы Ли
- Алгебры Хопфа
- Теория полей классов
- Коммутативная алгебра
- Теория представлений
- Гомологическая алгебра
- Представления алгебр Ли
- Эллиптические кривые
- Алгебраические группы

Алгебра

Классический учебник Клода Шевалле начинается со следующей констатации:

> *“Алгебра является не просто частью математики. Она играет по отношению к математике такую же роль, какую сама математика долгое время играла по отношению к физике.”*

Это действительно так, огромная часть изучаемых в самых различных разделах математики структур и возникающих при этом вычислений носит по существу алгебраический характер. Одной из принципиальных установок нашей программы было значительное обновление общего курса алгебры.

Алгебра возникла несколько тысячелетий назад как наука о решении уравнений и систем уравнений. Так она продолжала пониматься и в XVI—XVII веках, и даже большую часть XVIII века. Однако в XIX—XX веках ее содержание значительно расширилось. Абсолютно революционное изменение предмета алгебры произошло в начале XIX века и связано с именем Галуа. Оказалось, что основную роль в алгебре играют алгебраические структуры, такие как группы, поля, кольца и т.д. Морально, группы описывают симметрии различных объектов. Кольца и поля позволяют одновременно изучать важнейшие структурные вопросы для чисел, функций и операторов. Поэтому эти и аналогичные структуры возникают повсюду в математике.

Эта тенденция была продолжена кодификацией линейной алгебры, которая стала универсальным вычислительным инструментом в самой математике и ее приложениях, и возникновением некоммутативных структур в работах Гамильтона, Кэли, Грассмана и других замечательных математиков. Во второй половине XIX века, это развитие набрало силу в работах Дедекинда, Кронекера, Фробениуса, и многих других. Наконец, алгебра приобрела почти современную форму в 1896--1926 годах, в работах школы Гильберта и Нетер. Обычные университетские курсы примерно на этом и останавливаются.

Однако алгебра продолжала постоянно меняться и после этого. В частности, в отличие от большинства обычных курсов мы стремимся отразить в нашем общем курсе революцию произошедшую в алгебре в 1940--1950-х годах, связанную с возникновением теории категорий, гомологической алгебры и т.д. Кроме того, в нашем курсе подчеркивается связь с алгоритмическими вопросами, компьютерной алгеброй и другими компьютерными приложениями, такими как теория кодирования, получившими столь широкое развитие начиная с 1960-х годов и совершенно не учитываемыми большинством традиционных курсов.

Продолжение аннотации на следующей странице.

Алгебра

В первом семестре вводятся и начинают изучаться основные алгебраические структуры такие как группы, кольца, поля, модули, векторные пространства и т.д. Особую роль играют классические примеры: числа, многочлены, матрицы и их родственники. В этом семестре упор делается не на трудные теоремы, хотя доказывается и несколько таких важных теорем, в частности связанных с арифметикой коммутативных колец, а на основные примеры и конструкции.

Во втором семестре те же структуры продолжают изучаться уже более глубоко. С использованием теории колец удается получить важные классификационные теоремы линейной алгебры, такие как канонический вид линейных операторов. Кроме того, изучается геометрическая алгебра (геометрия пространств со скалярным произведением), рудименты алгебраической геометрии, и собственно теория групп (конечные группы, свободные группы, действия групп и т.д.)

Первой центральной темой третьего семестра является полилинейная алгебра — тензоры, поливекторы и пр., играющая огромную роль как в самой математике (дифференциальная геометрия, многомерное интегрирование и т.д.) и физике. Одной из новинок нашего курса является большая глава, посвященная теории представлений конечных групп — конечномерной, но некоммутативной модели гармонического анализа, играющей важнейшую роль в огромном количестве приложений. Еще одной новинкой нашего курса является большая глава по теории категорий, которая позволяет взглянуть на все остальные математические курсы с совершенно новой, более общей, чем теоретико-множественная, точки зрения.

Наконец, в четвертом семестре доказывается несколько центральных классических теорем, относящихся к структурной теории некоммутативных колец, алгебраической теории чисел и теории Галуа, а также предлагается первое знакомство с некоторыми основными понятиями гомологической алгебры — мощнейшего аппарата для решения огромного количества классических и современных структурных проблем.

Алгебра 1

Размер: 4 часа лекций, 3 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В конце XIX — начале XX века произошла революция в алгебре, которая сместила акцент с решения систем уравнений на исследование алгебраических свойств объектов. В этом семестре вы узнаете о таких алгебраических системах как кольца, поля, векторные пространства и модули, научитесь основам элементарной теории чисел и линейной алгебры.


Александр Станиславович Сивацкий



Михаил Владимирович Бондарко


Андрей Вячеславович Семенов

Необходимые знания:

- Математика на уровне школьной программы

Где понадобится:

Математический анализ (особенно функциональный анализ и анализ Фурье), дифференциальные уравнения, геометрия, теория вероятностей, криптография.

Вы научитесь:

- решать системы линейных уравнений и сравнений
- использовать китайскую теорему об остатках для быстрых вычислений
- строить интерполяционные многочлены
- проводить вычисления в конечных полях
- подсчитывать количество комбинаторных объектов (например, раскрасок куба в n цветок)
- узнаете теоретические основы алгоритма RSA

Содержание:

- Элементарная теория колец и арифметика
- Многочлены и поля
- Векторные пространства и начала линейной алгебры
- Элементарная теория групп
- Определители

Алгебра 2

Размер: 4 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В этом семестре мы продолжим изучать линейную алгебру, а именно теорию линейных операторов (помимо прочего, основа для квантовой механики!) и теорию квадратичных форм, продолжим изучать теорию групп, а потом перейдем к тензорной алгебре, лежащей в основе многих областей дифференциальной геометрии и физики. Также мы познакомимся с одним из самых красивых математических открытий XIX века — кватернионами.


Александр Станиславович Сивацкий



Алексей Владимирович Степанов


Глеб Вячеславович Ненашев

Необходимые знания:

- Алгебра 1
- Геометрия и топология 1

Где понадобится:

Математический анализ (особенно функциональный анализ и анализ Фурье), дифференциальные уравнения, геометрия, математическая физика, геометрия (особенно дифференциальная), теория вероятностей

Вы научитесь:

- спектральному анализу конечномерных линейных операторов
- вычислению и использованию матричных разложений
- заданию поворотов в 3- и 4-мерном пространстве при помощи кватернионов
- работе с тензорами
- заданию групп образующими и соотношениями и вычислениям в группах

Содержание:

- Теория линейных операторов
- Квадратичные и эрмитовы формы
- Матричные разложения
- Группа движений пространства и кватернионы
- Теория групп
- Полилинейная алгебра

Алгебра 3

Размер: 4 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В середине XX века выяснилось, что традиционное к тому времени понимание математического объекта как "множество + структура" часто не дает нужной гибкости. Есть две проблемы: во-первых, элементы множеств можно сравнивать только на равенство, а часто хочется иметь отношение вроде гомотопии вместо равенства, во-вторых, с элементами вообще неудобно обращаться, а удобнее воспринимать объект как "черный ящик", который можно только сравнивать с другими объектами, а не изучать его внутреннее устройство. Теория категорий, изначально появившаяся как аппарат внутри алгебраической топологии, решает эти проблемы, и теперь становится языком не только математики, но и информатики (например, в теории типов, в функциональных языках программирования). Теперь слоган звучит как "Математическая теория — это категория + оснащение". В этом семестре мы изучим основы теории категорий, а кроме того, займемся теорией представлений конечных групп, которая находит применение, помимо прочего, в кристаллографии, квантовой механике, физике элементарных частиц и физике высоких энергий.

Виктор Александрович Петров

Алексей Владимирович Степанов

Необходимые знания:

- Алгебра 1
- Алгебра 2

Где понадобится:

Функциональный анализ, анализ Фурье, алгебраическая геометрия, алгебраическая топология.

Вы научитесь:

- использовать язык теории категорий
- доказывать существование свободных объектов
- понимать фразу "Монада — это моноид в категории эндофункторов"

Содержание:

- Начала теории категорий
- Теория представлений конечных групп
- Абелевы категории

Алгебра 4

Размер: 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В этом семестре мы изучим гомологическую алгебру — мощный аппарат для решения различных задач, особенно в области алгебраической геометрии и алгебраической топологии.

Виктор Александрович Петров

Михаил Владимирович Бондарко

Необходимые знания:

- Алгебра 1
- Алгебра 2
- Алгебра 3

Где понадобится:

Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология.

Вы научитесь:

- применять методы гомологической алгебры к решению различных задач
- вычислять многочлен Гильберта

Содержание:

- Производная категория
- Гомологическая алгебра

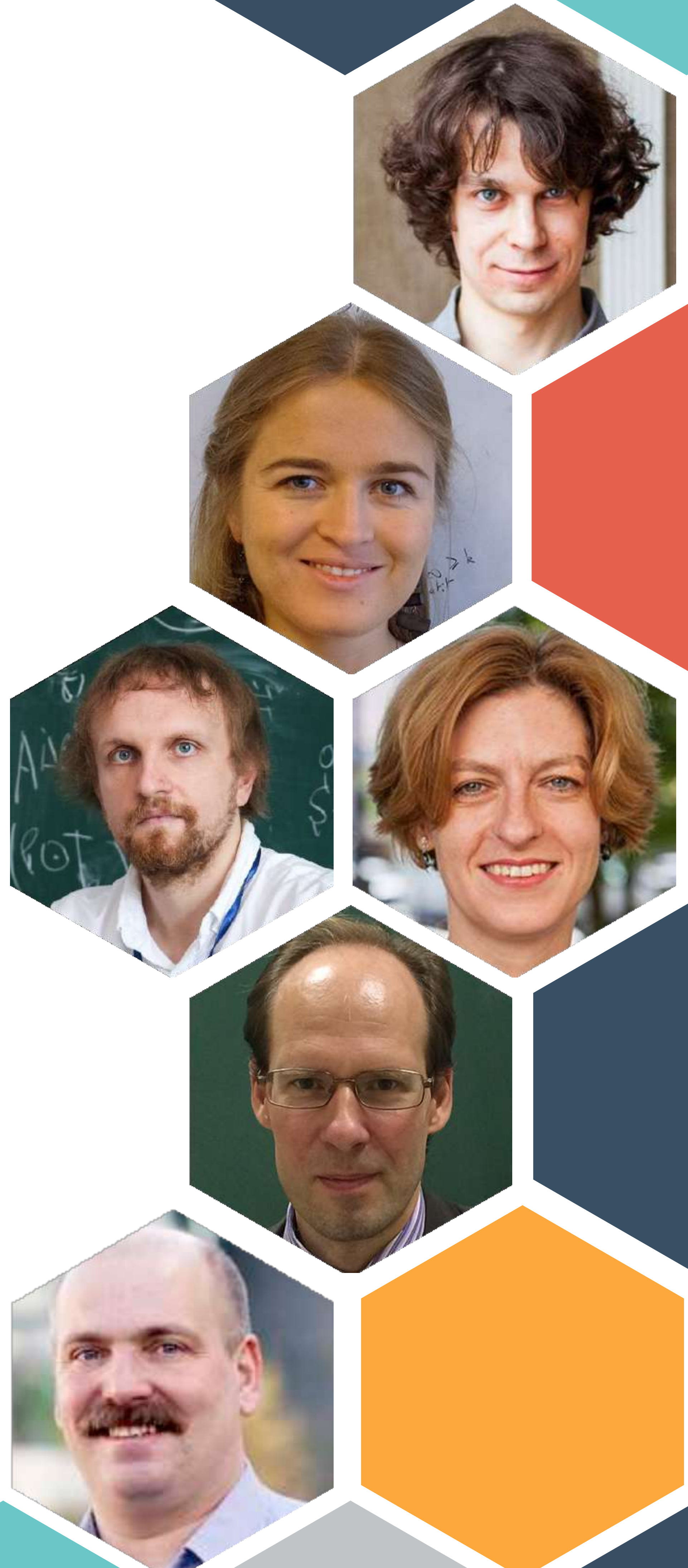
Теоретическая информатика

Обязательные курсы:

- Математические основы алгоритмов-1
- Математические основы алгоритмов-2
- Теоретическая информатика 1
- Теоретическая информатика 2

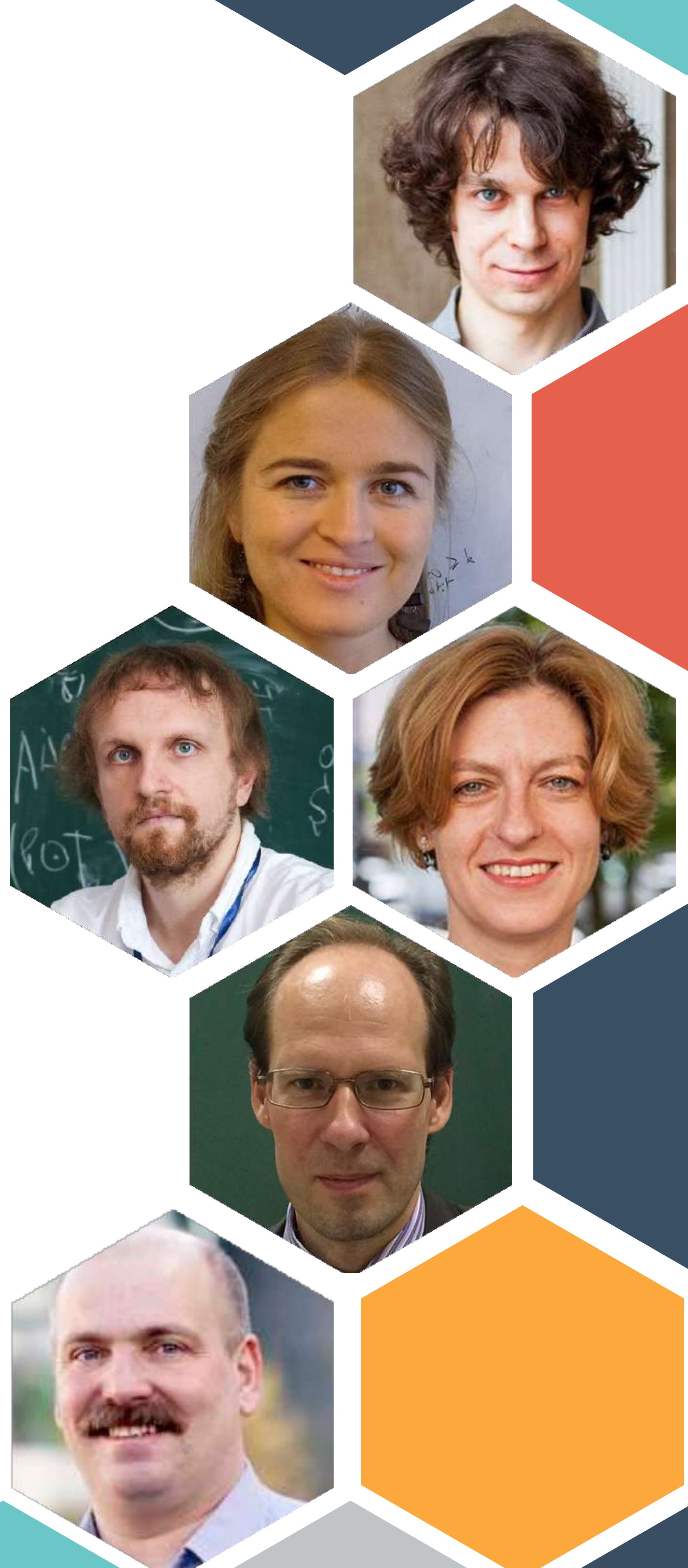
Примеры курсов по выбору:

- Автоматы на бесконечных строках и верификация
- Алгоритмы для NP-трудных задач
- Алгоритмы на строках
- Введение в квантовые вычисления
- Вероятностные алгоритмы и хеширование
- Вычислительная геометрия
- Дополнительные главы алгоритмов
- Параметризованные алгоритмы
- Современные структуры данных
- Теория автоматов
- Тонкие оценки сложности вычислений
- Формальные грамматики
- Эффективные параллельные алгоритмы



Теоретическая информатика

Теоретическая информатика изучает математические теории, стоящие за технологиями обработки информации. По форме это математика, с определениями, теоремами и доказательствами, однако всё это вдохновлено предметами и задачами из области информатики. Для математиков это ещё один раздел математики, который можно изучать для общей математической эрудиции, и в котором можно работать, применяя все свои математические знания для доказательства собственных теорем. Для специалистов в информационных технологиях это абстрактная наука, стоящая за их ремеслом, в которой нередко возникают новые идеи для будущих технологий; эту науку изучают для общего профессионального развития и иногда берутся за её задачи, чтобы с их помощью разработать что-то принципиально новое.



Математические основы алгоритмов 1

Размер: 3 часа лекций (первую половину семестра), 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет

В первой части курса «Математические основы алгоритмов» изучается ряд классических алгоритмов, решающих нужные на практике задачи за меньшее число действий, чем представляется очевидным — всякий такой алгоритм не только важен для написания быстрых программ, но и примечателен как математический факт. Также изучаются структуры данных — различные способы представления данных в памяти, и алгоритмы для быстрого доступа к этим структурам. Показываются известные общие методы построения алгоритмов, изучаются многочисленные алгоритмы на графах и на строках. На практических занятиях по курсу студенты пишут программы для решения разнообразных задач, используя изученные в курсе алгоритмические идеи.

Иван Сергеевич Казменко

Александр Сергеевич Охотин

Необходимые знания:

- Дискретная математика

Где понадобится:

Продолжение курса Алгоритмов

Теоретическая информатика

спецкурсы по алгоритмам и теоретической информатике

Вы научитесь:

- Применять основные алгоритмы и структуры данных.
- Разрабатывать новые алгоритмы на основе классических методов.
- Реализовывать алгоритмы на языке C++.

Содержание:

- Метод «разделяй и властвуй» и метод динамического программирования.
- Алгоритмы сортировки.
- Алгоритмы поиска в графах.
- Быстрое умножение. Быстрое умножение матриц.
- Структуры данных: вектор, список, куча, двоичное дерево поиска.
- Строковые алгоритмы, суффиксное дерево.
- Алгоритмы сжатия данных.

Математические основы алгоритмов 2

Размер: 2 часа лекций, 1 часа практик в неделю (первая половина семестра)
Отчетность: зачет, экзамен

Вторая часть курса «Математические основы алгоритмов» начинается с изучения алгоритма быстрого преобразования Фурье, занимающего особое место в науке об алгоритмах благодаря своим глубоким связям как с чистой математикой (математический анализ, теория чисел), так и с инженерными приложениями (цифровая обработка сигналов, сжатие изображений). Затем мы знакомимся с концепцией параллельных алгоритмов, расширяющей традиционное понятие алгоритма как последовательности действий; мы рассматриваем параллелизм как низкого уровня (вычисления схемами), так и высокого уровня (вычисления на абстрактной многопроцессорной машине с параметрами, выражающими эффективность коммуникации и синхронизации). Следующая тема — теория оптимизации, имеющая в своей основе фундаментальные понятия линейной алгебры и геометрии выпуклых многогранников, и находящая широчайшие приложения в практических задачах. В рамках этой темы, мы вводим общие понятия линейного программирования, а также более подробно изучаем его частный случай — задачу о максимальном потоке в сети. В заключение, мы рассматриваем еще одно расширение понятия алгоритма: приближенные алгоритмы для решения оптимизационных задач, применяемые в случаях, когда получение точного решения слишком трудоемко. Практические занятия включают как решение задач по программированию, так и решение теоретических задач по разработке и анализу алгоритмов.



Александр Сергеевич Охотин

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Алгоритмы 1
- Дискретная математика
- Дискретная теория вероятностей
- Алгебра 1 (теория чисел, многочлены)

Где понадобится:

Теория сложности вычислений (в составе курса Теоретическая информатика и как спецкурс), спецкурсы по алгоритмам.

Вы научитесь:

- Применять дискретное преобразование Фурье для решения алгоритмических задач.
- Разрабатывать параллельные схемы и алгоритмы.
- Моделировать задачи оптимизации при помощи линейного программирования.
- Решать задачи о потоках в сетях.
- Разрабатывать приближенные алгоритмы для труднорешаемых задач.

Содержание:

- Дискретное преобразование Фурье и его применения
- Параллельные алгоритмы.
- Линейное программирование.
- Потоки в сетях.
- Приближенные алгоритмы.

Математические основы алгоритмов 3

Размер: 2 часа лекций, 3 часа практик в неделю (вторая половина семестра)
Отчетность: зачет, экзамен

В заключительной третьей части курса алгоритмов изучаются вероятностные алгоритмы, то есть алгоритмы, применяющие генератор случайных чисел. Работа таких алгоритмов — это случайный процесс, и можно говорить о вероятности того или иного пути вычисления, а также о вероятности получения того или иного ответа. Оказывается, что для ряда задач существуют вероятностные алгоритмы, работающие существенно быстрее, чем известные человечеству детерминированные алгоритмы. Рассматриваются, во-первых, алгоритмы с ошибкой, которые с некоторой вероятностью выдают неправильный ответ — запуская эти алгоритмы много раз, можно уменьшить вероятность ошибки до приемлемого уровня. Во-вторых, изучаются алгоритмы, выдающие правильный ответ всегда, но работающие разное время в зависимости от удачности полученных ими случайных чисел — качество таких алгоритмов определяется математическим ожиданием времени их работы.

Александр Владимирович Тискин

Необходимые знания:

- Алгоритмы 1
- Дискретная математика
- Дискретная теория вероятностей
- Алгебра 1 (теория чисел, многочлены)

Где понадобится:

Теория сложности вычислений (в составе курса Теоретическая информатика и как спецкурс), спецкурсы по алгоритмам.

Вы научитесь:

- Применять случайные числа алгоритмах.
- Оценивать вероятность ошибки и математическое ожидание времени работы вероятностных алгоритмов.

Содержание:

- Вероятностные алгоритмы для проверки умножения матриц и проверки равенства многочлена нулю.
- Алгоритмы для нахождения наименьшего остовного дерева.
- Проверка выполнимости булевой формулы (2SAT, 3SAT), метод случайного блуждания.
- Хэш-функции и хэш-таблицы.
- Вероятностная проверка простоты числа.
- Алгоритмы, обрабатывающие вход по мере его поступления. Задача кэширования страниц памяти.

Теоретическая информатика 1

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В базовом курсе теоретической информатики рассказывается об основных понятиях и результатах этой области науки. Во вводной лекции формализуется понятие вычислимости и доказывается существование алгоритмически неразрешимых задач. Далее первая половина курса посвящена теории формальных языков, изучающей фундаментальные модели теоретической информатики — конечные автоматы и формальные грамматики. Конечный автомат — это модель вычислений с конечным объёмом памяти, не зависящим от длины входных данных; в курсе изучаются их основные разновидности. Формальные грамматики — это модель синтаксиса языков, естественных и искусственных, и подобных им структур; изучаются их выразительные возможности и алгоритмы синтаксического анализа. Во второй половине курса рассказывается о теории сложности вычислений, исследующей такие вопросы, как сколько времени или памяти необходимо для решения той или иной алгоритмической задачи. Вводятся основные классы сложности задач, изучаются соотношения между ними, приводятся полные задачи в различных классах. Среди прочих изучается одна из центральных задач теоретической информатики — вопрос о равенстве классов P и NP, то есть о том, верно ли, что если правильность решения некоторой задачи можно проверить за полиномиальное время, то за полиномиальное же время можно и найти решение. На практических занятиях по курсу решаются математические задачи на доказательство различных свойств моделей вычисления.



Александр Сергеевич Охотин

Необходимые знания:

- Алгоритмы-1, 2, 3
- Дискретная математика
- Дискретная теория вероятностей

Где понадобится:

Продолжение курса теоретической информатики, спецкурсы цикла теоретической информатики.

Вы научитесь:

- Доказывать алгоритмическую неразрешимость задач.
- Строить конечные автоматы различных видов, преобразовывать их друг к другу.
- Описывать формальные языки грамматиками, применять алгоритмы синтаксического анализа.
- Определять классы вычислительной сложности задач.
- Соотносить сложность задач по времени и по памяти.

Содержание:

- Вычислимость и неразрешимые задачи, машины Тьюринга
- Вычислимость с конечной памятью, регулярные языки
- Конечные автоматы: детерминированные, недетерминированные, двухсторонние, вероятностные
- Формальные грамматики и алгоритмы синтаксического анализа
- Классы сложности вычислений по времени и памяти, соотношения между ними
- Классы сложности L, NL, P, NP, PSPACE и EXP и полные задачи в них.
- Полиномиальная иерархия, вероятностные вычисления.

Теоретическая информатика 2

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В повседневной жизни у нас есть интуитивное понятие “количества информации”. Например в книге “Война и мир” содержится больше информации, чем, к примеру, на этикетке от сока. В данном курсе мы формализуем это интуитивное представление через понятие энтропии, что даст нам полезный математический инструмент, который поможет, в частности, понять, какие из вычислительных задач являются простыми, а какие сложными. Пользуясь теорией информации мы покажем: как можно эффективно кодировать или сжимать данные; как разделить секрет между несколькими людьми таким образом, чтобы они смогли его узнать только в случае, если они соберутся вместе. Одной из основных частей курса является “коммуникационная сложность”, где мы попытаемся ответить на вопрос: каким количеством информации два человека должны обменяться, чтобы совместно решить какую-нибудь задачу. Коммуникационная сложность — один из активно развивающихся разделов теоретической информатики, применяющийся, в частности, для анализа эффективности алгоритмов. Ближе к концу курса мы рассмотрим “колмогоровскую сложность”, где мы изучим свойства случайных объектов и поймем, какие именно объекты мы можем, исходя из из внутренних характеристик, считать случайными, а какие нет.

Светлана Александровна Пузынина

Александр Владимирович Тискин

Необходимые знания:

- Дискретная математика
- Теоретическая информатика 1
- Дискретная теория вероятностей

Где понадобится:

Спецкурсы по теоретической информатике

Вы научитесь:

- Определять количество информации в элементе множества и в распределении вероятностей.
- Применять понятие энтропии для решения информационных и комбинаторных задач
- Применять энтропийное кодирование для сжатия информации
- Разрабатывать коммуникационные протоколы и оценивать их сложность
- Оперировать понятиями способа описания и колмогоровской сложности, понимать их связь с теорией вычислимости

Содержание:

- Меры информации. Информация по Хартли, энтропия Шеннона.
- Приложения энтропии в комбинаторике
- Энтропийное кодирование, блочное кодирование с потерями.
- Коммуникационная сложность, способы ее оценки. Формульная сложность функций.
- Колмогоровская сложность

Дискретная математика и математическая логика

Обязательные курсы:

- Дискретная математика
- Основы Наивной Теории Множеств
- Математическая Логика 1
- Математическая Логика 2
- Комбинаторика

Примеры курсов по выбору:

- Графы и немного алгебры
- Паросочетания и факторы графа
- Раскраски графов и орграфы
- Связность графов
- Современная комбинаторика
- Современная теория графов
- Разбиения
- Аддитивная комбинаторика

Дискретная математика

1 **семестр** **Размер:** 1.5 часа лекций, 1.5 часа практик в неделю
Отчетность: экзамен

Курс вводит основные понятия и теоремы дискретной математики, и состоит из трех основных разделов: булевы функции, перечислительная комбинаторика, теория графов. В разделе "Булевы функции" изучаются стандартные функции булевой логики, основные классы булевых функций, свойства замкнутости, выразимости и полноты. Доказывается критерий полноты для системы булевых функций. В разделе "Перечислительная комбинаторика" рассматриваются перестановки, размещения, сочетания без повторения и с повторением, числа Каталана, исследуется принцип доказательства комбинаторных тождеств при помощи биективных рассуждений. В разделе "Теория графов" изучаются ориентированные и неориентированные графы, пути и циклы в графе, связность, критерии существования эйлеровых и гамильтоновых путей и циклов. Изучаются леса и деревья и их свойства. Изучаются планарные графы, комбинаторные свойства планарной укладки графов, существование прямолинейной укладки, критерии планарности графа в терминах запрещенных подграфов. Изучается раскраска графов, доказывается теорема о пяти красках, теоремы о раскраске графов ограниченной степени и о реберной раскраске. Изучаются паросочетания в графах, доказываются критерии существования совершенных паросочетаний. Изучаются системы предпочтений и устойчивые паросочетания в них. Вводятся основные понятия теории Рамсея, обобщающей изучение графов и их раскрасок на конечные и бесконечные гиперграфы.

Светлана Александровна Пузынина

Федор Владимирович Петров

Необходимые знания:

- Математика в пределах школьного курса.

Где понадобится:

Математические основы алгоритмов, Дискретная теория вероятностей, Комбинаторика, спецкурсы по дискретной математике и теоретической информатике

Вы научитесь:

- Представлять булевы функции различными способами и исследовать их свойства
- Решать перечислительные комбинаторные задачи
- Выводить асимптотические оценки роста комбинаторных функций
- Исследовать свойства графов и систем предпочтений
- Исследовать структуру конечных и бесконечных комбинаторных объектов

Содержание:

- Булевы Функции, нормальные формы, многочлен Жегалкина. Теорема Поста.
- Типы выборок и их подсчет. Грубые оценки на n!. Формула Стирлинга.
- Числа Каталана.
- Графы. Теорема Эйлера. Строка де Брейна.
- Гамильтоновы пути и циклы.
- Деревья.
- Плоские и планарные графы.
- Раскраски графов.
- Паросочетания в графах.
- Связность и разделяющие множества в графах.
- Системы предпочтений и устойчивые паросочетания.
- Реберные раскраски.
- Теория Рамсея.

Основы наивной теории множеств

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю (первая половина семестра)
Отчетность: экзамен

В основе современной математики лежит понятие множества, причём особую роль играют «актуально бесконечные множества», что было немыслимо в более ранние времена. Вместе с тем наивное и ничем не ограниченное представление о множествах приводит к противоречиям (парадоксам). В результате борьбы с этими парадоксами теория множеств обзавелась формальной аксиоматикой, за которой стоит представление о «кумулятивной» природе множеств. Суть этого представления в том, что множества строятся снизу вверх в ходе определённого бесконечного процесса. Аксиоматическое описание множеств и использование развитого аппарата математической логики позволили адекватным образом решить ряд важнейших проблем, включая знаменитую континуум-гипотезу (первая проблема Гильберта). Данный курс призван познакомить студентов с базовыми понятиями аксиоматической теории множеств, а также такими неотъемлемыми её методами как трансфинитная индукция и рекурсия.

Виктор Львович Селиванов

Необходимые знания:

- Математика на уровне школьной программы.

Где понадобится:

Алгебра, Геометрия и топология, Математический анализ и т.д.

Вы научитесь:

- Моделировать базовые математические объекты посредством множеств
- Работать с мощностями множеств
- Использовать трансфинитную индукцию и рекурсию

Содержание:

- Аксиомы теории множеств: система Цермело–Франкеля с аксиомой выбора
- Отношение равномощности на множествах
- Упорядоченные множества
- Ординалы и кардиналы
- Трансфинитная индукция и рекурсия
- Лемма Цорна, теорема Цермело и другие эквиваленты аксиомы выбора
- Аксиома детерминированности как альтернатива аксиомы выбора

Математическая логика 1

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю (первая половина семестра)
Отчетность: зачет

Одной из главных задач математической логики является разработка и изучение формальных моделей различного рода языковых явлений — от семантических и грамматических проблем в естественных языках до дедуктивных и алгоритмических свойств математических теорий и семантики языков программирования. В частности, на счету математической логики - формализация понятий «доказательства» (это завершило процесс формирования аксиоматического метода, начатого Евклидом) и «вычислимой функции» (это позволило точными методами изучать алгоритмы, применявшиеся в математике тысячелетиями), а также получение классических результатов о невыводимости (например, континуум-гипотезы) и алгоритмической неразрешимости (скажем, теории групп и задачи существования решений диофантовых уравнений (десятая проблема Гильберта)). Логические методы позволяют точно описывать синтаксис и семантику различных языков, а затем успешно изучать их как математические объекты. Математическая логика интересуется как дедуктивно-алгоритмической, так и выразительной функцией языков. Она применяется во многих разделах математики, информатики, лингвистики, философии и тесно связана с основаниями этих наук. Первая часть данного курса призвана познакомить студентов с понятиями доказуемости, истинности, и определимости в классической логике. В частности, мы изучим теорему компактности Гёделя–Мальцева, теорему Тарского об элиминации кванторов в упорядоченном поле вещественных чисел, теорему Гёделя о полноте исчисления предикатов, и обсудим их многочисленные применения.

Виктор Львович Селиванов

Необходимые знания:

- Основы наивной теории множеств
- Алгебра 1

Где понадобится:

Математическая логика 2, Теоретическая информатика, различные спецкурсы по математической логике (Модальная логика, Введение в неклассические логики) и теоретической информатике (например, Теория сложности доказательств).

Вы научитесь:

- Строить выводы в исчислениях для классической логики
- Работать с различными семантическими понятиями
- Применять теорему компактности и теорему Тарского.

Содержание:

- Синтаксис и семантика логики предикатов (формулы, структуры, гомоморфизмы и изоморфизмы). Определимость и автоморфизмы.
- Фильтры и ультрафильтры, теорема об ультрапроизведениях, теорема компактности.
- Фрагменты логики предикатов. Логика высказываний, проблема тысячелетия PvsNP и ее варианты.
- Элиминация кванторов в упорядоченном поле вещественных чисел и в поле комплексных чисел.
- Исчисление предикатов. Свойства аксиом, правил вывода, выводимости, множеств Хенкина.
- Теоремы о существовании модели и о полноте исчисления предикатов.
- Перечислимые и разрешимые теории. Интерпретации.

Математическая логика 2

Размер: 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: экзамен

Вторая часть курса посвящена более систематическому изложению основных (наряду с теорией множеств) разделов логики: теории моделей, теории доказательств, и теории вычислимости. Теория моделей тесно связана с алгеброй (мощность моделей, полные теории, аксиоматизируемые классы структур, элиминация кванторов), анализом (нестандартный анализ Робинсона и неархимедовы поля) и информатикой (конечные модели, игры Эренфойхта). Теория доказательств изучает различные способы формализации вывода и вопросы разрешимости теорий (неразрешимость арифметики, теоремы Гёделя о неполноте). Теория вычислимости дает строгие определения вычислимых функций (в частности, в терминах рекурсивных функций и вычислимости программами языков программирования), что связывает вычислимость с доказуемостью и позволяет доказать теоремы Гёделя о неполноте — пожалуй, самые известные и широко обсуждаемые за пределами математики математические результаты. У них имеется немало полезных следствий, среди которых теорема Тарского о неопределимости арифметической истины, которая служит отправным пунктом в современных исследованиях по формальной теории истины, а также результаты о неразрешимости теорий (например, теории колец).

Виктор Львович Селиванов

Михаил Романович Старчак

Необходимые знания:

- Основы наивной теории множеств
- Математическая логика 1
- Алгебра 1
- Алгебра 2

Где понадобится:

Различные спецкурсы по математической логике и теоретической информатике.

Вы научитесь:

- Применять теоремы компактности и Лёвенгейма-Сколема, а также игры Эренфойхта к конкретным
- теориям
- Строить выводы в (аксиоматических) теориях
- Доказывать алгоритмическую разрешимость и неразрешимость теорий
- Строить интерпретации между теориями
- Классифицировать вычислительные проблемы по их алгоритмической сложности

Содержание:

- Теоремы о понижении и повышении мощности, парадокс Сколема, нестандартные модели арифметики и анализа.
- Аксиоматизируемые классы структур, критерии аксиоматизируемости.
- Полные и модельно полные теории, элиминация кванторов.
- Элементарная эквивалентность и ее варианты, игры Эренфойхта.
- Вычислимость, рекурсивные функции, функции задаваемые программами. Тезис Чёрча-Тьюринга.
- Арифметизация логики. Перечислимость и неразрешимость логики предикатов, примеры разрешимых и неразрешимых теорий. Неразрешимость и неполнота арифметики.
- Рекурсивные частичные функции, главные вычислимые нумерации, их применения к свойствам программ.
- m-Сводимость, Тьюрингова сводимость, операция скачка, арифметическая иерархия.
- Теорема Тарского о неопределимости истины.

Комбинаторика

6 семестр **Размер:** 1 час лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: зачет

Выдающийся специалист по комбинаторике Ричард Стенли определяет её предмет как дискретные множества с простыми дополнительными структурами (например, графы и частично упорядоченные множества — но конечные группы уже не являются чисто комбинаторным объектом). Характерной особенностью комбинаторики как области математического знания является особая важность методов (по сравнению с конкретными теоремами). Именно вокруг основных методов комбинаторики построен наш курс. Изучаются вероятностный, линейно-алгебраический, полиномиальный методы. Особое внимание уделяется теории матроидов — и её приложениям в теории графов. Завершается курс основами теории кодов, исправляющих ошибки, и дизайнов — “очень симметричных” комбинаторных структур.

Пользуясь тем, что комбинаторика изучает простые вещи, как правило знакомые сильным школьникам, сформулируем ряд красивых теорем курса.

Планета представляет собой поверхность выпуклого многогранника, в котором из каждой вершины выходит чётное число рёбер. Каждая грань это страна, и она желает быть покрашена на глобусе в один из трёх цветов её национального флага.
Теорема (Алон, Тарси): это возможно сделать так, чтобы соседние страны были разного цвета.

Теорема (Эрдёш). Существует граф, в котором все циклы имеют длину не меньше миллиона, но который нельзя правильно покрасить в миллион цветов.

Федор Владимирович Петров

Необходимые знания:

- Алгебра 1-2
- Дискретная теория вероятностей
- Математический анализ 1-2

Вы научитесь:

- видеть дополнительные структуры
- неявно доказывать существование нужных вещей, оценивая вероятности
- вычислять коэффициенты многочленов
- понимать, где оптимален жадный алгоритм

Где понадобится:

Комбинаторика всё шире применяется в математике (от алгебры до эргодической теории) и давно является основной дисциплиной в информатике. На нашем факультете читается курс продвинутой комбинаторики (по-английски — в магистратуре), являющийся в некотором смысле продолжением этого.

Продолжение аннотации на следующей странице.

Комбинаторика

6 семестр **Размер:** 1 час лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: зачет

Проективная плоскость порядка — это множество из n^2+1 “точек” и такого же количества “прямых”, каждая прямая содержит $n+1$ точку, через каждую точку проходит $n+1$ прямая, через любые две точки проходит ровно одна прямая, любые две прямые пересекаются ровно в одной точке. **Теорема (Брук, Райзер).** Если порядок n проективной плоскости дает остаток 1 или 2 при делении на 4, то — сумма двух квадратов. (Знаменитая гипотеза утверждает, что верно больше: — степень простого числа.)

(Графы Мура.) Пусть в графе степень каждой вершины равна $d>1$ и между любыми двумя вершинами существует, причём единственный, путь из не более чем 2 рёбер. Тогда $d \in \{2,3,7,57\}$.(При $d=2,3,7$ такие графы существуют, $d=57$ — жгучий открытый вопрос.)

Теорема (Нэш-Уильямс). Пусть m — натуральное число. Для графа равносильны следующие условия:
(i) между любыми $k=1,2,\ldots$ его вершинами проведено не более $m(k-1)$ рёбер;
(ii) множество рёбер можно покрыть m лесами (иными словами, рёбра можно раскрасить в m цветов так, чтобы не было одноцветных циклов).

(Косое неравенство Боллобаша)
Пусть $A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_k$ — такие конечные множества, что $|A_i|=r$, $|B_i|=s$, $A_i\cap B_i=\varnothing$ при всех i, $A_i\cap B_j\neq\varnothing$ при всех $i<j$.

Тогда $k\le\binom{r+s}{s}$.


Федор Владимирович Петров

Содержание:

- Комбинаторная теорема о нулях. Вычисление коэффициентов многочленов. Приложение к списочным раскраскам графов.
- Матроиды. Основные структуры. Теоремы Радо и Нэша-Уильмса. Многочлен Татта матроида и графа.
- Вероятностный метод: нижняя оценка на числа Рамсея R(k,k), оценка размера независимого множества, графы с большим обхватом и большим хроматическим числом. Графы-расширители. Локальная лемма Ловаса.
- Матрица смежности и лапласиан графа. Их собственные числа, матричная теорема о деревьях. Связь собственных чисел и свойства расширения. Сильно регулярные графы.
- Приложения линейной алгебры в комбинаторике: неравенства Фишера и Боллобаша для систем множеств, слабая гипотеза Бержа о совершенных графах.
- Коды, исправляющие ошибки. Линейные коды. Основные понятия, оценки Хэмминга, Синглтона, Варшамова-Гилберта, Плоткина, Элайеса-Бассалыго. Коды Хэмминга, Адамара, Рида-Соломона. Каскадные коды. Коды с помощью графов-расширителей.
- Матрицы Адамара. Дизайны, проективные плоскости. Теорема Брука-Райзера.

Геометрия и топология

Обязательные курсы:

- Геометрия и топология 1
- Геометрия и топология 2
- Дифференциальная геометрия 1
- Дифференциальная геометрия 2
- Гладкие многообразия

Примеры курсов по выбору:

- Симплектическая геометрия и топология
- Введение в теорию гомологий
- Введение в Риманову геометрию
- Топологическая К-теория
- Введение в теорию гомотопий
- Дополнительные главы геометрии
- Комбинаторика многогранников
- Современная геометрия
- Геометрическая теория групп
- Гладкие многообразия старших размерностей
- Введение в теорию выпуклых множеств
- Трехмерные многообразия
- Четырехмерные гладкие многообразия
- Введение в дифференциальную топологию
- Рациональная теория гомотопий
- Теория узлов
- Топологические методы в комбинаторике

Геометрия и топология 1

Размер: 4 часа лекций (половина семестра), 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Топология как наука сформировалась, по общему мнению, в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре в конце XIX века. Цель этого семестра — обучение языку теоретико-множественной (общей) топологии, которая уже давно является частью общематематического языка. Термин общая топология обозначает топологию, которая используется большинством математиков. Она учит понятно и точно говорить о вещах, связанных с идеей непрерывности. В наши дни изучение общей топологии действительно напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства большинства теорем чрезвычайно просты. Зато теорем этих очень много. Это и не удивительно — они играют роль правил, регулирующих употребление слов. В рамках курса мы познакомимся с основополагающими понятиями общей топологии (топологическими пространствами и их непрерывными отображениями), изучим важные топологические конструкции (подпространства,факторпространства, перемножения пространств) и фундаментальные топологические свойства (связность, компактность, аксиомы отделимости и счётности). Заканчивается курс изучением замечательного класса топологических пространств — n-мерных многообразий, включая топологическую классификацию одномерных многообразий и триангулированных двумерных многообразий

Евгений Анатольевич Фоминых

Гаянэ Юрьевна Панина

Необходимые знания:

- Математический анализ 1
- Основы наивной теории множеств

Где понадобится:

Математический анализ, алгебра, дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения, спецкурсы по геометрии и топологии.

Вы научитесь:

- Языку общей топологии.

Содержание:

- **Базовые понятия топологии:** метрические и топологические пространства, открытые и замкнутые множества, база топологии, подпространства, произведение пространств, факторпространства, непрерывные отображения и гомеоморфизмы.
- **Свойства топологических пространств:** аксиомы отделимости и счётности, связность и линейная связность, компактность и секвенциальная компактность.
- **Топологические многообразия:** классификация одномерных многообразий, знакомство с классическими поверхностями, теорема о классификации двумерных поверхностей.

Геометрия и топология 2

Размер: 3 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Курс состоит из трёх частей.

Первая часть курса базируется на векторной алгебре, изучаемой в курсе Алгебра 1. Первичным геометрическим объектом для нас будет векторное пространство — абелева группа векторов, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по известным из школы правилам. Мы изучим скалярные, векторные и смешанные произведения векторов; евклидовы, аффинные и проективные пространства и их отображения. Завершится эта часть курса классификацией квадрик в двумерном и трехмерном случаях.

Теория выпуклых множеств является предметом второй части курса. Она представляет собой особо привлекательную математическую дисциплину. В ее рамках из немногих наглядных и разумных предпосылок можно делать важные заключения как в геометрии, так и в анализе. Выпуклые множества играют важную роль во многих оптимизационных задачах.

Третья часть посвящена введению в алгебраическую топологию через её наиболее классический и элементарный раздел, выстраивающийся вокруг понятий фундаментальной группы и накрывающего пространства.

Евгений Анатольевич Фоминых

Нина Дмитриевна Лебедева

Необходимые знания:

- Алгебра 1
- Алгебра 2
- Геометрия и топология 1

Где понадобится:

Практически в любом изучаемом в университете курсе, поскольку содержит базовые математические понятия.

Вы научитесь:

-

Содержание:

- Евклидова, аффинная и проективная геометрия: скалярные, векторные и смешанные произведения векторов, ортогонализация по Граму—Шмидту, аффинные и проективные отображения, евклидова и аффинная классификация квадрик.
- Выпуклые множества: выпуклые оболочки и выпуклые комбинации, теоремы об отделимости, опорные гиперплоскости, поляры, экстремальные точки, полиэдральные множества, выпуклые многогранники.
- Начала алгебраической топологии: гомотопии, фундаментальная группа, накрытия.

Дифференциальная геометрия 1

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

В третьем семестре в курсе геометрии изучается классическая дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, а также происходит первое знакомство с понятием гладкого многообразия, которое используется во многих разделах геометрии, топологии, математического анализа и математической физики.

В отличие от аналитической геометрии, где кривые и поверхности задаются уравнениями от координат, в дифференциальной геометрии они задаются параметрически, то есть как множества значений гладких отображений. Для кривых верна теорема о натуральной параметризации: любая регулярная кривая может быть получена как траектория точки, движущейся с единичной скоростью. Благодаря этому кривая на плоскости однозначно задаётся одной функцией — кривизной, а кривая в трёхмерном пространстве — двумя функциями: кривизной и кручением. Кривизна и кручение являются локальными инвариантами, но позволяют исследовать и глобальные свойства кривой.

Следующая тема курса — понятие гладкого многообразия. Гладкое многообразие можно представлять себе как гладкую поверхность, рассматриваемую как «вещь в себе», то есть не обязательно вложенную какое-либо евклидово пространство. На таком объекте есть локальные «криволинейные» системы координат, но, в отличие от декартовых или косоугольных координат в евклидовом пространстве, переход от одних координат к другим описывается нелинейными функциями. Так как это довольно сложная структура, приходится потрудиться для того, чтобы дать для неё определения ключевых понятий: касательного пространства, гладких функций на многообразии и гладких отображений между многообразиями, производных (дифференциала) гладкого отображения. После того, как эта работа проделана, появляется удобный язык для бескоординатных рассуждений, которые в традиционном координатном изложении были бы чрезмерно длинными и громоздкими. Это поможет в том числе и в последующих темах курса.

Нина Дмитриевна Лебедева

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Геометрия 1-2
- Математический анализ 1-2
- Алгебра 1-2

Где понадобится:

В курсах по дифференциальной геометрии, гладким многообразиям, анализе на многообразиях, динамическим системам, спецкурсах по римановой геометрии, теории гомологий, симплектической геометрии, гладким динамическим системам.

Вы научитесь:

- Проводить бескоординатные вычисления на кривых, поверхностях и других гладких объектах.
- Проверять гладкость и находить касательные пространства кривых, поверхностей, многообразий, заданных различными способами.
- Вычислять геометрические инварианты гладких кривых и поверхностей.
- Выводить глобальные свойства кривых и поверхностей из локальных.
- Строить кривые и поверхности с предписанными геометрическими характеристиками.

Дифференциальная геометрия 1

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Оставшаяся часть семестра посвящена классической дифференциальной геометрии поверхностей. Как и для кривых, главной локальной характеристикой поверхности является кривизна. В отличие от кривых, кривизна поверхности зависит не только от точки, но и от направления в касательной плоскости. Мы изучим связанные с этим понятия: главные кривизны и главные направления, гауссова кривизна, средняя кривизна, выясним их геометрический смысл и связи с геометрическими свойствами поверхностей. Важный круг вопросов в геометрии поверхностей — какие свойства являются «внутренними», то есть сохраняются при изгибаниях поверхности без растяжений и сжатий. Например, плоский лист бумаги можно изогнуть в цилиндр или конус, но его нельзя изогнуть так, чтобы получилась часть сферы. Из этого следует, в частности, что невозможны географические карты, изображающие поверхность Земли без искажений. Этот и многие другие факты следуют из замечательной теоремы Гаусса, которая утверждает, что гауссова кривизна поверхности не меняется при изгибаниях.

Сергей Владимирович Иванов

Евгений Анатольевич Фоминых

Содержание:

- Регулярные кривые, кривизна и поворот плоской кривой, кривизна и кручение пространственной кривой
- Гладкие многообразия и подмногообразия, касательные пространства и касательное расслоение многообразия, дифференцирование функций на многообразиях
- Регулярные поверхности, первая и вторая квадратичная форма поверхности, кривизны поверхностей
- Кривые на поверхностях
- Символы Кристоффеля и ковариантное дифференцирование. Теорема Гаусса.

Дифференциальная геометрия 2

Размер: 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Курс геометрии в 4-м семестре посвящен началам римановой геометрии. В двумерном случае риманова геометрия — это почти то же самое, что внутренняя геометрия поверхностей, в которой рассматриваются только те свойства поверхностей, которые не меняются при изгибаниях. С этой точки зрения достаточно малая область на цилиндре не отличима от области на плоскости, а для областей на сфере это не так. Кроме классической дифференциальной геометрии, изучение римановой геометрии важно для приложений в классической механике, оптике, общей теории относительности. В обязательном курсе происходит только начальное знакомство с римановой геометрии, дальнейшее её изучение возможно на спецкурсах. В начале, после знакомства с определением римановой метрики, мы рассмотрим плоскость Лобачевского. Этот пример риманова многообразия занимает особое место в истории математики: его существование доказывает независимость пятого постулата Евклида от остальных аксиом планиметрии. В курсе будет построена модель Пуанкаре плоскости Лобаческого и найдены движения, прямые и окружности этой модели. Далее мы построим технические средства, которые потребуются для изучения римановых метрик: скобки Ли, тензоры, связность Леви—Чивита. Эти понятия принадлежат не только и столько геометрии, они нужны во многих областях алгебры, анализа, динамических систем. В оставшейся часть курса рассматриваются фундаментальные понятия римановой геометрии: геодезические и кривизна. Геодезические — линии в римановом многообразии, которые играют роль прямых евклидовой геометрии. В частности, геодезические являются локально кратчайшими путями в римановом пространстве, из любой точки в каждом направлении выходит ровно одна геодезическая, любые две достаточно близкие точки соединяются единственным геодезическим отрезком и т. д. Кривизна римановой метрики измеряет её локальное отличие от евклидовой метрики. В общем случае кривизна описывается четырехвалентным тензором. Мы сосредоточимся на двумерном случае, где тензор кривизны сводится к одной числовой функции, которая для поверхностей в евклидовом пространстве совпадает с гауссовой кривизной. В некотором смысле внутренняя геометрия поверхности полностью определяется кривизной. В частности, кривизна влияет на углы треугольников: при положительной кривизне углы треугольников на поверхности больше, чем на плоскости, а при отрицательной — меньше. Углы и кривизна связаны между собой замечательной формулой Гаусса-Бонне: сумма углов геодезического треугольника отличается от π на интеграл кривизны по треугольнику.

Нина Дмитриевна Лебедева

Необходимые знания:

- Геометрия и топология 1-2
- Дифференциальная геометрия 1
- Математический анализ 1-2
- Алгебра 1-3

Где понадобится:

В курсах по гладким многообразиям, анализу на многообразиях, динамическим системам, спецкурсах по римановой геометрии, гладким динамическим системам, математической физике.

Вы научитесь:

- Исследовать геометрические характеристики фигур на плоскости Лобачевского.
- Оперировать основными понятиями анализа на многообразиях.
- Вычислять скобки Ли векторных полей, уравнения геодезических и кривизну римановых метрик.

Содержание:

- Римановы многообразия, примеры. Плоскость Лобачевского.
- Начала анализа на многообразиях: скобка Ли векторных полей, тензоры, связность Леви-Чивита.
- Геодезические и экспоненциальное отображение. Тензор кривизны римановой метрики. Уравнение Якоби.
- Кривизна и внутренняя геометрия поверхности, кривизна и углы треугольников.

Гладкие многообразия

Размер: 2 часа лекций в неделю
Отчетность: экзамен

Многообразия — топологические пространства, которые локально не отличимы от евклидова пространства, но их глобальное строение может быть разным. Например, простейшие поверхности сфера и тор локально топологически эквиваленты плоскости, но в целом они отличаются и от плоскости, и друг от друга. Гладкие многообразия — особо важный класс многообразий, так как они используются во многих разделах математики, а не только в топологии.

Гладкие многообразия появляются в курсе дифференциальной геометрии в третьем и четвертом семестрах, но там исследуются их локальные геометрические свойства. В шестом семестре мы изучим вопросы об их глобальном топологическом строении.

Важнейшую роль в этом играет теорема Сарда, которую можно сформулировать так: множество решений системы уравнений, построенных из гладких функций, «почти всегда» само является гладким. Эта теорема и ее следствия позволяют сводить многие вопросы к исследованию ситуаций «общего положения». Например, пересечение двух гладких поверхностей, лежащих в трехмерном пространстве, может быть устроено очень сложно (и даже иметь дробную размерность), однако «в общем положении» оно будет набором гладких линий.

Применяя технику общего положения вместе с техникой сглаживания, мы докажем некоторые «интуитивно очевидные», но трудные фундаментальные теоремы топологии, в том числе инвариантность размерности (евклидовы пространства разных размерностей топологически не эквивалентны). Затем изучим понятие степени отображения, которое обобщает на старшие размерности число оборотов замкнутой линии вокруг точки на плоскости. С его помощью мы докажем еще несколько классических теорем топологии, в том числе гладкий вариант теоремы Жордана (простая замкнутая линия или поверхность разбивает соответственно плоскость или пространство на две компоненты).

В конце курса мы познакомимся с теорией Морса, которая позволяет изучать топологическое строение многообразия с помощью критических точек функций на них.

Сергей Владимирович Иванов

Необходимые знания:

- Геометрия 1-4
- Математический анализ 1-2
- Алгебра 1-3

Где понадобится:

В спецкурсах аналитической, геометрической и топологической направленности.

Вы научитесь:

- Ориентироваться в основных понятиях, связанных с гладкими многообразиями.
- Доказывать фундаментальные топологические теоремы об инвариантности размерности, топологической инвариантности края, нестягиваемости сфер и т.д.
- Применять соображения «общего положения» для изучения гладких многообразий и отображений.
- Отвечать на вопросы «почему нельзя причесать ежа», «почему нельзя сделать бутылку Клейна без самопересечений» и т.д.

Содержание:

- Гладкое разбиение единицы, сглаживание непрерывных функций.
- Вложения и погружения. Теорема Уитни.
- Прообразы регулярных значений. Теорема Сарда.
- Многомерные теоремы Борсука и Брауэра, топологическая инвариантность размерности и края.
- Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Степень отображения и ее применения.
- Трансверсальность, индексы пересечения.
- Функции Морса.

Теория вероятностей и математическая статистика

Обязательные курсы:

- Дискретная теория вероятностей
- Теория вероятностей
- Основы математической статистики

Примеры курсов по выбору:

- Bootstrap-методы в статистике
- Стохастическое исчисление
- Предельные теоремы для стохастических процессов
- Стохастическая геометрия
- Теория случайных процессов
- Вероятностные распределения и их характеризация
- Теория мартингалов
- Точечные процессы
- Пуассоновские процессы
- Сильные предельные теоремы теории вероятностей
- Случайные процессы в актуарных и финансовых приложениях
- Геометрия чисел

Дискретная теория вероятностей

2 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: экзамен

Теория вероятностей — наука о математическом представлении и анализе случайных явлений. Появившись на свет в виде решений разрозненных задач об азартных играх (Ферма и Паскаль) и простейшей демографической статистики, она долго считалась сугубо прикладной наукой, но со временем превратилась в полноценный самостоятельный раздел теоретической математики, со своей “душой” — математическим понятием независимости — и своими законами — законом больших чисел и центральной предельной теоремой, — которые по универсальности применения можно поставить рядом с законами природы.

Хотя современное изложение теории вероятностей требует свободного использования теории меры и интеграла, уже её дискретный вариант, описывающий только явления с конечным или счётным числом возможных исходов, позволяет далеко продвинуться в изучении понятий этой науки (событие, вероятность, независимость, случайная величина) и тонком анализе таких содержательных вероятностных моделей, как случайное блуждание, ветвящийся процесс, цепь Маркова или динамически растущий случайный граф.

Михаил Анатольевич Лифшиц

Татьяна Дмитриевна Мосеева

Необходимые знания:

- Школьная комбинаторика
- Алгебра 1 (матрицы)

Где понадобится:

При изучении курсов вероятностной направленности — углублённом курсе собственно теории вероятностей (V семестр), теории случайных процессов, математической статистики, теории мартингалов;
в анализе данных и алгоритмов (компьютерные науки);
в бесчисленных приложениях: финансовая математика, геофизический инжиниринг (например, моделирование нефтеносных пород), страхование, метеорология, моделирование динамически растущих дискретных объектов (социальные сети, Интернет).

Вы научитесь:

- Строить математические модели случайных явлений
- Оперировать с характеристиками случайных величин
- Анализировать свойства ветвящихся процессов, в том числе различать вырождающиеся и невырождающиеся процессы
- Классифицировать цепи Маркова и их состояния (возвратность, эргодичность, периодичность).
- Находить предельные распределения этих цепей
- Исследовать свойства гигантских случайных графов

Содержание:

- Дискретная модель случайного явления. События, независимость.
- Случайные величины, их математические ожидания и дисперсии
- Схема Бернулли, закон больших чисел и центральная предельная теорема для неё
- Производящие функции и их применение к анализу ветвящихся процессов
- Свойства случайного блуждания: возвратность, распределение времени выхода (задача о разорении)
- Цепи Маркова: классификация состояний и предельные теоремы
- Динамические и статические модели случайных графов.

Теория вероятностей

5 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Данный курс является естественным продолжением курса "Дискретная теория вероятностей", который читается во втором семестре. Если раньше рассматривались модели случайных экспериментов с конечным или счетным числом исходов, то теперь речь идет об общей математической модели, основанной на аксиоматике Колмогорова, в которой вероятностное пространство – абстрактное измеримое пространство с нормированной мерой (называемой вероятностью). Такой подход позволяет использовать для развития теории вероятностей мощный аппарат теории меры и интеграла Лебега.

В первой части курса вводятся необходимые основные понятия: случайные величины, их распределения, числовые характеристики распределений (математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции, моменты). Подробно обсуждается понятие независимости случайных величин и сигма-алгебр и доказываются различные критерии независимости. Вводится аппарат характеристических функций, — вероятностный аналог преобразований Фурье. Большое внимание уделяется понятию слабой сходимости распределений, — наиболее важному типу сходимости, используемому в приложениях (например, для строгого доказательства того, что процесс броуновского движения можно рассматривать как предел случайных блужданий). Дается детальное изложение свойств многомерных гауссовских распределений.

Юрий Александрович Давыдов

Мария Владимировна Платонова

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Математический анализ 1-4
- Геометрия 1-2

Где понадобится:

- В различных вопросах анализа, спецкурсах по математической статистике, теории чисел, стохастической геометрии, случайным блужданиям на группах, теории мартингалов, стохастическому исчислению, точечным процессам
- В различных вопросах теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем
- При изучении вопросов финансовой математики. а также в различных практических применениях

Вы научитесь:

- Работать с распределениями вероятностей
- Оценивать вероятности событий
- Пользоваться техникой условных математических ожиданий
- Применять вероятностные методы в других областях математики

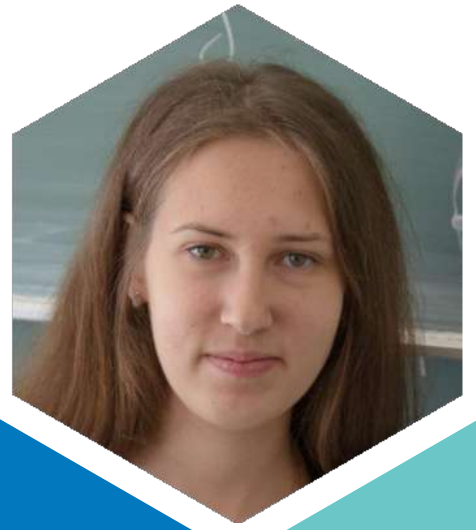
Теория вероятностей

5 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Большой раздел курса посвящен важным классическим вопросам: закону больших чисел (ЗБЧ), центральной предельной теореме (ЦПТ) и сходимости рядов из независимых величин. ЗБЧ — это общее название для результатов, устанавливающих равенство асимптотического временно̀го среднего стационарной последовательности с ее пространственным средним. В курсе доказываются различные теоремы такого типа, в том числе усиленный ЗБЧ Колмогорова для независимых одинаково распределенных случайных величин. В качестве одного из приложений ЗБЧ приводится предложенное Бернштейном красивое вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Под ЦПТ в теории вероятностей понимается класс теорем, утверждающих, что сумма достаточно большого количества слабо зависимых равномерно малых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному. В курсе доказывается ряд классических ЦПТ (теоремы Леви, Ляпунова, Линдеберга—Феллера) и обсуждаются их применения. Доказательства этих теорем основаны на аппарате характеристических функций и демонстрируют мощь аналитических методов.

Прямые вероятностные методы выступают на первый план при изучении рядов из независимых случайных величин. Знаменитая теорема Колмогорова о трех рядах дает необходимые и достаточные условия для их сходимости. В заключительной части курс знакомит слушателей с техникой условных математических ожиданий и элементами теории мартингалов. Кроме того, дается введение в теорию ветвящихся процессов.



Юрий Александрович Давыдов

Продолжение аннотации на следующей странице.

Содержание:

- Вероятностное пространство
- Распределения случайных величин и их характеристики
- Характеристические функции
- Гауссовские распределения
- Сходимость вероятностных распределений
- Законы больших чисел
- Центральная предельная теорема
- Условные математические ожидания и мартингалы
- Ветвящиеся процессы

Основы математической статистики

7 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: экзамен

Необходимые знания:

- Теория вероятностей
- Алгебра 1 (матрицы)

Математическая статистика — раздел математики, осуществляющий функцию обратной связи между реальным миром и его математическими моделями, выраженными на языке теории вероятностей. Иными словами, математическая статистика позволяет настраивать числовые параметры модели так, чтобы сделать её применимой, а также позволяет проверить, насколько теоретическая модель соответствует реальности.

В этом вводном курсе представлены основные понятия математической статистики — статистическая модель, статистические оценки, их свойства и характеристики, задача регрессии, критерии проверки статистических гипотез.

Где понадобится:

В углубленных курсах статистики и её приложений: статистическом анализе временных рядов и случайных процессов, кластерном анализе многомерных данных, байесовской статистике и машинном обучении.

В бесчисленных приложениях: финансовая математика, геофизический инжиниринг (например, моделирование нефтеносных пород), медицина, страхование, метеорология...

Михаил Анатольевич Лифшиц

Максим Сергеевич Николаев

Вы научитесь:

- Строить статистические модели реальных явлений
- Исследовать характеристики статистических оценок: несмещенность, состоятельность
- Строить байесовские статистические оценки
- Решать задачу линейной регрессии и оценивать точность её решения
- Проверять основные классы статистических гипотез (гипотезу о заданном распределении, гипотезу однородности, гипотезу независимости, гипотезу случайности) с помощью критериев типа хи-квадрат, ранговых критериев, критерия Колмогорова и др.

Продолжение аннотации на следующей странице.

Основы математической статистики

7 **семестр** **Размер:** 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: экзамен

Курс включает следующие разделы:

- Статистическая модель. Выборка. Параметрические и непараметрические системы распределений.
- Дискриптивная статистика: эмпирическое среднее, дисперсия, эмпирическая функция распределения. Их предельные свойства — несмещенность, состоятельность. Теорема Гливенко—Кантелли. Использование эмпирических средних и дисперсий при оценке параметров основных семейств распределений.
- Интервальные оценки параметров. Доверительный интервал, доверительная вероятность. Построение доверительных интервалов для параметров нормального закона (лемма Фишера).
- Достаточные и полные статистики. Теорема Фишера—Неймана о построении достаточных статистик. Экспоненциальные семейства распределений и нахождение достаточных статистик для них.
- Задача линейной регрессии и её решение методом наименьших квадратов. Вероятностная трактовка регрессии. Теорема Маркова об оптимальности метода наименьших квадратов.
- Постановка задачи проверки гипотез. Ошибки первого и второго рода.
- Использование критерия хи-квадрат в задачах проверки соответствия, независимости, однородности.
- Ранговые критерии проверки гипотез (на примере критерия Вилкоксона-Манна-Уитни).
- Проверка гипотезы случайности (анализ датчиков случайных чисел).
- Статистические методы проверки линейной зависимости: оценка ковариации, коэффициента корреляции, коэффициент ранговой корреляции Спирмана.

Максим Сергеевич Николаев

Содержание:

- Статистическая модель. Выборка. Параметрические и непараметрические системы распределений.
- Эмпирическое среднее, дисперсия, эмпирическая функция распределения. Несмещенность, состоятельность оценок. Теорема Гливенко—Кантелли.
- Интервальные оценки параметров.
- Достаточные и полные статистики. Теорема Фишера—Неймана о построении достаточных статистик. Экспоненциальные семейства распределений.
- Линейная регрессия. Метод наименших квадратов. Вероятностная трактовка регрессии. Теорема Маркова.
- Проверка гипотез соответствия, независимости, однородности, случайности.

Дифференциальные уравнения и динамические системы

Обязательные курсы:

- Дифференциальные уравнения и динамические системы 1
- Дифференциальные уравнения и динамические системы 2

Примеры курсов по выбору:

- Введение в теорию отслеживания
- Качественная теория динамических систем
- Введение в гладкие динамические системы
- Введение в эргодическую теорию
- Динамика параболических уравнений
- Дифференциальные уравнения с запаздыванием
- Негладкие дифференциальные уравнения
- Современные динамические системы
- Динамика негиперболических систем



Дифференциальные уравнения и динамические системы

3 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

4 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Обыкновенные дифференциальные уравнения — основной аппарат при моделировании и исследовании любых процессов, характеристики которых изменяются с течением времени. Ньютон создал теорию дифференциальных уравнений для того, чтобы описать структуру Вселенной. Теория дифференциальных уравнений опирается на методы математического анализа, алгебры, геометрии и топологии. Теория динамических систем синтезирует идеи и методы классической теории дифференциальных уравнений и топологии. В курсе изучаются как динамические системы с регулярным поведением траекторий, так и системы с хаотической динамикой.

Сергей Юрьевич Пилюгин

Михал Юрьевич Тяглов

Необходимые знания:

- Математический анализ 1-2
- Алгебра 1-2
- Геометрия и топология 1-2

Где понадобится:

При решении задач механики, физики, биологии, при моделировании социальных процессов.

Вы научитесь:

- Находить решения и интегралы дифференциальных уравнений 1 порядка и линейных систем дифференциальных уравнений
- Решать краевые задачи
- Исследовать поведение траекторий динамических систем в евклидовых и топологических пространствах

Содержание:

В куре изучаются: все основные разделы современной теории дифференциальных уравнений: существование и единственность решений, их зависимость от начальных данных и параметров, теория линейных систем; один из разделов курса посвящен задаче об устойчивости решений - самой важной для приложений задаче теории дифференциальных уравнений; также изучается теория динамических систем — глубокого современного обобщения классических дифференциальных уравнений.

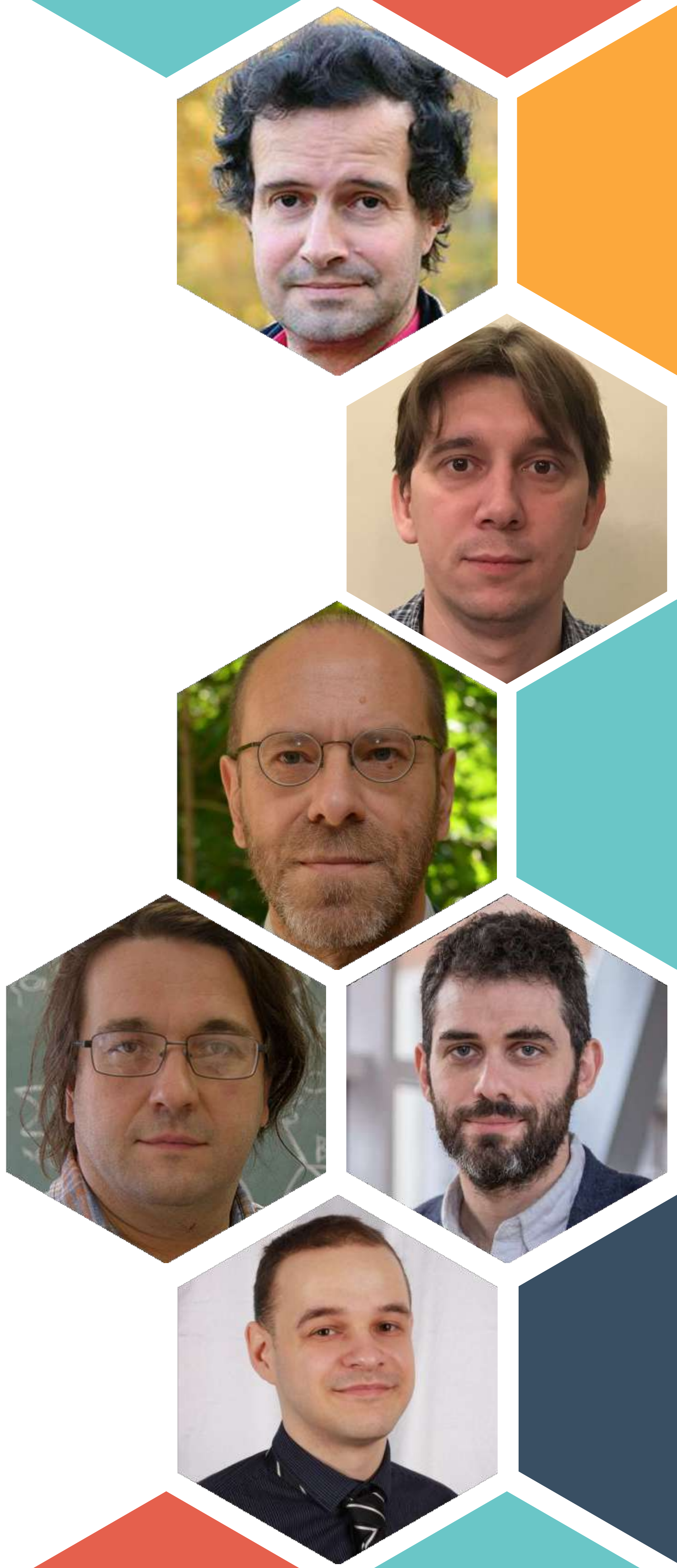
Математическая физика

Обязательные курсы:

- Математическая физика 1
- Математическая физика 2
- Вариационное исчисление
- Физика

Примеры курсов по выбору:

- Дополнительные главы вариационного исчисления
- Спектральная теория дифференциальных операторов
- Теория потенциала
- Моделирование динамических систем и задач математической физики
- Симплектическая геометрия и аналитическая механика
- Пространства Соболева
- Нелинейный функциональный анализ
- Обобщенные функции



Математическая физика 1

5 семестр **Размер:** 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: зачет

Исторически сложилось, что различные дисциплины, так или иначе связанные с изучением дифференциальных уравнений в частных производных, в Санкт-Петербурге объединяются под общим названием “Математическая физика”. Обязательный курс математической физики для студентов-математиков факультета МКН СПбГУ состоит из двух семестров.

Основная цель первого семестра — научиться отличать те задачи математической физики, решения которых можно найти в явном виде (в том или ином смысле), научиться выписывать формулы представления решений в тех задачах, где это возможно, и извлекать из этих формул информацию о свойствах решений различных типов уравнений в частных производных.

Роман Владимирович Романов

Михаил Юрьевич Тяглов

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Математический анализ
- Обобщенные функции
- Вариационное исчисление (задача Штурма--Лиувилля)
- Анализ Фурье (ряды Фурье, преобразование Фурье)
- Дифференциальная геометрия (криволинейные системы координат)

Где понадобится:

Физика, спецкурсы по спектральной теории дифференциальных операторов, спецкурсы по уравнениям в частных производных эволюционного типа, включая, спецкурсы по математической гидродинамике, любые спецкурсы, связанные с математической физикой (квантовая механика, квантовая теория поля, общая теория относительности и другие), спецкурсы, использующие теорию представлений (линейные представления группы вращений), спецкурсы по анализу, связанные с теорией сингулярных интегральных операторов.

Вы научитесь:

- Находить явный вид решений уравнений в частных производных в тех задачах, где это возможно
- Устанавливать качественные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных различных типов исходя из явного представления этих решений
- Анализировать гладкость решений дифференциальных уравнений в частных произодных и их асимптотическое поведение вблизи особых точек в зависимости от гладкости данных задачи
- Интерпретировать полученные математические результаты с физической точки зрения

Математическая физика 1

5 семестр **Размер:** 4 зачетных единицы, 2 часа лекций, 1 час практик в неделю
Отчетность: зачет

В этом семестре будет рассматриваться базовые модели дифференциальных уравнений в частных производных: уравнение Лапласа, волновое уравнение, уравнение теплопроводности и другие. Для перечисленных моделей будут найдены фундаментальные решения, получены явные формулы для решений некоторых краевых и начально-краевых задач в “стандартных” областях (таких как все пространство, шар, полупространство и т.д.), установлена единственность классических (т.е. гладких) решений этих задач, а также исследованы качественные свойства найденных решений.

Также в этом семестре рассматривается ряд вопросов, касающихся спецфункций, в частности, излагается теория сферических функций и их связь с однородными гармоническими полиномами.

Роман Владимирович Романов

Михаил Юрьевич Тяглов

Содержание:

- **Уравнение Лапласа:** фундаментальное решение уравнения Лапласа, потенциал Ньютона, функция Грина задачи Дирихле, функция Грина для шара, принцип максимума для гармонических функций, свойства гармонических функций.
- **Сферические функции:** оператор Лапласа в сферических координатах, однородные гармонические полиномы, разделение переменных в сферических координатах, полиномы Лежандра, ортогональный базис в L_2 на сфере.
- **Уравнение теплопроводности:** фундаментальное решение уравнения теплопроводности, задача Коши, принцип максимума и теорема единственности, объемный тепловой потенциал.
- **Волновое уравнение:** одномерное волновое уравнение, задача Коши в $\mathbb{R}^3$, запаздывающие потенциалы, задача Коши в $\mathbb{R}^2$, энергетическое неравенство и единственность решений, свойства решений волнового уравнения.

Математическая физика 2

6 **семестр** **Размер:** 4 зачетных единицы, 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Во втором семестре курса математической физики на примере эллиптического оператора второго порядка общего вида (т.е. с переменными коэффициентами) будет изложена общая теория краевых задач.

Основным объектом изучения во втором семестре являются т. н. слабые решения (из энергетического класса), а основным “инструментом" их изучения — методы функционального анализа (в частности, теория Фредгольма для компактных линейных операторов в гильбертовом пространстве).

Роман Владимирович Романов

Михаил Юрьевич Тяглов

Николай Дмитриевич Филонов

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Математический анализ
- Функциональный анализ
- Анализ Фурье
- Вариационное исчисление

Где понадобится:

Спецкурсы по спектральной теории дифференциальных операторов, спецкурсы по уравнениям в частных производных эволюционного типа, включая спецкурсы по математической гидродинамике, любые спецкурсы, связанные с математической физикой (квантовая механика, квантовая теория поля, общая теория относительности и другие), любые спецкурсы по современной теории дифференциальных уравнений в частных производных (теория регулярности, дополнительные главы вариационного исчисления, теория краевых задач и другие), любые спецкурсы по численным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных и численному моделированию.

Математическая физика 2

6 **семестр** **Размер:** 4 зачетных единицы, 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет, экзамен

Ключевыми вопросами будут вопросы существования, единственности и регулярности слабых решений. Для изучения этих вопросов будет развит необходимый математический аппарат (в частности, теория пространств Соболева, включая теоремы вложения для них). Помимо теории линейных уравнений, в курсе также излагаются некоторые методы исследования нелинейных задач, в частности, прямой метод вариационного исчисления в многомерном случае. Теория начально-краевых задач для уравнений эволюционного типа не поместилась в двухсеместровый общий курс математической физики и будет предложена слушателям в качестве “большого" спецкурса по выбору на 4-ом курсе или в магистратуре (параболические уравнения и уравнения Навье—Стокса).

Роман Владимирович Романов

Николай Дмитриевич Филонов

Вы научитесь:

- Доказывать существование решений различных краевых задач и анализировать структуру множества их решений
- Выяснять качественные свойства решений линейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида
- Выводить оценки норм различных краевых задач в различных функциональных пространствах
- Анализировать регулярность слабых решений уравнений в частных производных
- Доказывать существование решений для некоторых нелинейных задач
- В конечном итоге (и это главное!) — анализировать чисто математическими методами корректность различных физических моделей, описывающих те или иные явления окружающего мира

Содержание:

- **Пространства Соболева:** слабые производные, пространства Соболева, неравенство Фридрихса, теоремы о плотности и продолжении, теоремы вложения, компактность вложений, следы функций из пространств Соболева.
- **Краевые задачи для эллиптических уравнений:** постановки задач, слабые решения, энергетическое неравенство и единственность слабых решений, существование слабых решений, спектр задачи Дирихле в ограниченной области, прямой метод вариационного исчисления.
- **Свойства решений эллиптических задач:** локальная гладкость слабых решений, гладкость слабых решений вблизи границы, принцип максимума, самосопряженные эллиптические операторы.

Вариационное исчисление

Размер: 1 час лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет

I. В курсе математического анализа на первом курсе вы научились находить максимумы и минимумы функций, заданных на отрезке, прямой или в конечномерном пространстве. На практике встречаются задачи, когда нужно найти экстремум какого-нибудь интеграла (минимизировать энергию физической системы, или время какого-нибудь процесса и т. п.). Параметром является функция, которая в ваших руках. Но интеграл не просто от нее, а от какой-то комбинации из нее и ее производных. Пространство функций бесконечномерно, поэтому это вопрос о поиске экстремумов в бесконечномерном пространстве. Такими задачами и занимается вариационное исчисление.

Николай Дмитриевич Филонов

Михаил Юрьевич Тяглов

Продолжение аннотации на следующей странице.

Необходимые знания:

- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения
- Линейная алгебра
- Начала функционального анализа

Где понадобится:

В физике и математической физике, в уравнениях в частных производных, в спектральной теории дифференциальных операторов, в спецкурсах матфизического направления, и для создания общей математической культуры.

Вы научитесь:

- Находить экстремумы интегральных функционалов
- Находить собственные функции и собственные числа задачи Штурма—Лиувилля

Вариационное исчисление

Размер: 1 час лекций, 2 часа практик в неделю
Отчетность: зачет

II. В курсе дифференциальных уравнений вы доказали существование и единственность решения дифференциального уравнения на отрезке, если граничные условия заданы на одном конце отрезка. Часто встречаются задачи, когда граничные условия ставятся на разных концах. При некоторых значениях параметра оказывается, что решений то нет, то их бесконечно много. Такие значения образуют спектр дифференциального оператора. Это похоже на линейную алгебру, где вы научились находить спектр матрицы, но поскольку пространство опять бесконечномерно, то собственных чисел оказывается бесконечно много (последовательность). Про это — вторая половина курса “Задача Штурма—Лиувилля”.

Николай Дмитриевич Филонов

Роман Владимирович Романов

Содержание:

I. Вариационное исчисление.

1. Интегральные функционалы. Функционалы в нормированных пространствах. Вариация интегрального функционала. Лемма Дюбуа—Реймона, обобщенная лемма Дюбуа—Реймона. Задача с фиксированными граничными точками. Принадлежность экстремальной функции классу C^2. Задача со свободными концами. Естественные граничные условия.
2. Условный экстремум. Касательные к гиперповерхности. Условный экстремум в бесконечномерном пространстве. Изопериметрическая задача. Положение равновесия тяжелой нити.
3. Общая форма первой вариации. Интегральные функционалы на кривых. Уравнение Эйлера для интегральных функционалов на кривых. Условия трансверсальности.
4. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера—Остроградского.

II. Задача Штурма--Лиувилля.

1. Однородная задача Штурма—Лиувилля. Симметричность оператора Штурма—Лиувилля.
2. Нули собственных функций. Теорема Штурма.
3. Вариационная постановка задачи. Минимизирующая последовательность. Свойства предельной функции.
4. Нахождение бесконечной последовательности собственных значений задачи Штурма—Лиувилля вариационным методом.
5. Замкнутость системы собственных функций задачи Штурма—Лиувилля.

Физика

7 семестр **Размер:** 2 часа лекций в неделю
Отчетность: зачет

В этом курсе основной задачей будет построение классической теории взаимодействия частиц с полем. При построении этой теории мы будем исходить по сути из двух фундаментальных физических принципов: принципа минимальности действия и симметрии.

В первой части мы опишем площадку, на которой разворачивается основное действие: это пространство Минковского. Фактически, это четырёхмерное многообразие со специальной метрикой (метрикой Минковского). Эта метрика “уважает” преобразования Лоренца, которые естественно получаются из требования постоянства скорости света.

Далее в пространстве Минковского появятся физические объекты — частицы и поля. Мы подробно опишем функционал действия на этих объектах, а также придадим им некое взаимодействие, и опишем его свойства. Затем мы напишем уравнения движения взаимодействующих частиц и полей — уравнения Максвелла — в разных формах.

Оставшиеся две части будут посвящены двум важным примерам: статическому и волновому. В статике мы сформулируем решение уравнения Пуассона в терминах функции Грина и придадим решению физический смысл (индуцированные заряды). В волновом случае мы обсудим решения волнового уравнения и поговорим про запаздывающие потенциалы с точки зрения физики.

Игорь Евгеньевич Шендерович

Необходимые знания:

- Математическая физика
- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения и динамические системы
- Вариационное исчисление

Где понадобится:

Спецкурсы по математической физике, квантовой механике, квантовой теории поля.

Вы научитесь:

- Видеть за словами “физическая теория” нечто большее, чем просто слова
- Находить физический смысл в общем и частном решении дифференциального уравнения в частных производных
- Выписывать действие теории из небольшого количества основных принципов
- Понимать, откуда берутся электромагнитные волны и какие у них основные свойства.

Содержание:

- Пространство Минковского и частицы в нём
- Действие и уравнение движения для частиц
- Напряжённости электромагнитного поля и калибровочная инвариантность
- Действие электромагнитного поля
- Уравнения Максвелла
- Уравнение Пуассона и функция Грина для него
- Мультипольное разложение, неприводимые представления SO(3)
- Волновое уравнение, электромагнитные волны
- Поляризация и калибровочная свобода
- Функция Грина волнового уравнения и запаздывающие потенциалы.

Дисциплины по выбору

В 5—8 семестрах студентам предлагаются курсы по выбору, которые бывают трех видов:

1. **Большой курс** (4 зачетных единицы, 2 часа лекций, 2 часа практик в неделю, экзамен).
2. **Малый курс** (3 зачетных единицы, 2 часа лекций, экзамен).
3. **Семинар** (2 зачетные единицы, 2 часа практик в неделю): каждому участнику курса дается задание разобрать определенную тему и сделать о ней доклад.

Предлагаемые курсы бывают как на русском, так и на английском языках.

5 **семестр**
Размер: 8–10 зачетных единиц
Отчетность: 1–2 экзамена

6 **семестр**
Размер: 14–16 зачетных единиц
Отчетность: 3–4 экзамена

7 **семестр**
Размер: 24–26 зачетных единиц
Отчетность: 4–5 экзаменов

8 **семестр**
Размер: 13–15 зачетных единиц
Отчетность: 2–3 экзамена

Список всех выбираемых курсов: https://math-cs.spbu.ru/courses/special/

Научно-исследовательская работа

5—6 **семестры** **Отчетность:** зачет

Выбор области математики и первые шаги в научной жизни — важный этап карьеры любого молодого математика. Преподаватели МКН помогают определиться с первыми задачами, обсуждают со студентами возможные подходы к их решению, учат тому, как записать новые результаты на профессиональном уровне и представить их на конференциях. Из текстов курсовых и дипломных работ студентов МКН:

Никита Карагодин

«О распределении времени последнего выхода гауссовского процесса за подвижную границу»

(под руководством [Михаила Анатольевича Лифшица](#))

Рассматривается гауссовский стационарный случайный процесс с непрерывными траекториями и его «момент окончательного ухода под линейную границу», то есть последний момент, когда процесс находится на прямой at, где — время. Нас интересует асимптотическое распределение момента окончательного ухода, когда параметр a стремится к нулю. В работе доказана предельная теорема о слабой сходимости распределения должным образом центрированного и нормированного момента ухода к двойному экспоненциальному распределению (распределению Гумбеля). Частный случай этой задачи, для совершенно конкретного процесса, возник в недавних работах Аурзада, Бетса и Лифшица, посвящённых математическому исследованию одной физической модели (разрыв броуновской цепочки частиц). В работе этот результат обобщается на достаточно широкий класс процессов.

Даниил Нигомедьянов

«Minimal ideal triangulations of hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary via Z_2-homology»

(под руководством [Евгения Анатольевича Фоминых](#))

We present a new lower bound for the triangulation complexity of connected compact 3-manifolds M with non-empty boundary via Z_2-homology. It is shown that this bound is stronger than those given by Frigerio, Martelli and Petronio in 2003. We use Z_2-homology to study the combinatorics of minimal ideal triangulations of M for which our lower bound is achieved. The class of such manifolds is denoted by M_h. Our next task is to distinguish manifolds in M_h. We characterize edges of minimal triangulations that yields a natural partition of the set of minimal triangulations into four classes. A natural question to ask does a manifold in M_h admits minimal triangulations of different classes. We prove that the answer is negative. Finally, we prove that each manifold in M_h, with a few exceptions, is a hyperbolic manifold with totally geodesic boundary components and some cusps. The hyperbolicity of manifolds in M_h provides several results concerning the Matveev‘s complexity and the hyperbolic volume of these manifolds.

Научно-исследовательская работа

5—6 **семестры** **Отчетность:** зачет

Дарья Сабирова

«Динамика одной континуальной социологической модели»

(под руководством Сергея Юрьевича Пилюгина)

Рассматривается дискретная динамическая система, моделирующая итеративный процесс выбора в группе агентов между двумя возможными исходами. Исследуемая модель основана на принципе bounded confidence, введенном Хегсельманном и Краузе. В соответствии с этим принципом, на каждом шаге процесса агент формирует свое мнение исходя из близких ему мнений других агентов. Возникающая динамическая система нелинейна и разрывна. Принципиальное отличие изучаемой в данной работе модели от ранее изучавшихся моделей такого типа состоит в том, что рассматривается не конечная, а бесконечная (континуальная) группа агентов. Такой подход требует применения существенно новых методов исследования. Описана структура возможных неподвижных точек возникающей динамической системы, изучена их устойчивость. Доказано, что любая траектория сходится к неподвижной точке.

Кирилл Тыщук

«Обнаружение скрытых шаблонов в обучении с подкреплением»

(под руководством Сергей Игоревича Николенко)

Одной из интересных открытых проблем из области обучения с подкреплением является обработка демонстраций эксперта, выполняющего определённую задачу, с целью более эффективного обучения новых агентов выполнять схожие задачи. Один из возможных подходов – выделение из экспертных данных крупных абстракцией или шаблонов, общих между всеми задачами. Это подобно тому, как мы, понаблюдав за кем-то, занятым игрой, можем в общих чертах понять, что в ней происходит, и, когда нам доведётся играть самим, быстро разобраться в происходящем. В данной работе был разработан метод на основе ранжирующей модели DSSM, а также среда и инструменты для изучения его достоинств и недостатков. По итогам анализа, базовая модель была доработана. Полученные модели показали хорошее качество на синтетических данных. Код и данные экспериментов доступны на GitHub.

Научно-исследовательская работа

5—6 **семестры** **Отчетность:** зачет

Игорь Чабан

«Адиабатическая связность и кривизна на пространстве модулей эллиптических кривых»

(под руководством Петра Георгиевича Зографа)

В различных квантовомеханических системах наблюдается явление фазы Берри, изучение которой представляет интерес как с физической, так и с геометрической точек зрения. Суть феномена заключается в следующем. Система определяется гамильтонианом, зависящим от набора параметров. Если в пространстве параметров пройти по замкнутому пути, то собственные состояния гамильтониана с фиксированной энергией преобразуются нетривиальным образом. В работе Аврона, Сейлера и Зографа исследуется фаза Берри для квантовой бесспиновой частицы в магнитном поле на двумерном торе, система описывается гамильтонианом Ландау, варьируемыми параметрами являются коэффициенты внутренней плоской метрики, а также коэффициенты Ааронова–Бома (компоненты векторного потенциала, определяющего магнитное поле). Там же построен явный базис пространства основных состояний в терминах тета- функций Римана, а также найдена кривизна так называемой адиабатической связности.

В данной работе мы вычисляем 1 — форму адиабатической связности, а также находим голономию вдоль различных петель. Отдельно стоит отметить, что нам удается найти естественное описание всех необходимых конструкций на языке голоморфных векторных расслоений над пространствами модулей. Так, например, мы показываем, что пространство основных состояний отождествляется с пространством глобальных голоморфных сечений определенного линейного расслоения над эллиптической кривой, а адиабатическая связность соответствует эрмитовой связности в некотором эрмитовом расслоении над пространством модулей эллиптических кривых с двумя отмеченными точками. Построение такой голоморфной модели представляет отдельный интерес и открывает возможность для дальнейших обобщений, интересных как с точки зрения физики, так и с точки зрения математики.

Приходите заниматься математикой вместе с нами на факультет МКН СПбГУ!

https://math-cs.spbu.ru/bsc-math/
https://joinmkn.ru